Η ανισοτητα Brunn–Minkowski για το μετρο του Gauss

Ίρις Πρωτοσύγκελλου

Επιβλέπων: Σιλουανός Μπραζιτίκος

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Εισαγωγή

Η ανισότητα Brunn–Minkowski αποτελεί ένα από τα κεντρικά αποτελέσματα της κυρτής γεωμετρίας. Στη βασική της μορφή συνδέει τον όγκο δύο υποσυνόλων A, B, του $\mathbb{R}^n$ με τον όγκο του αθροίσματός τους κατά Minkowski, δηλαδή το σύνολο

$$\lambda A + (1-\lambda)B, \;\; \lambda \in (0,1).$$

Το εντυπωσιακό είναι ότι μια φαινομενικά απλή ανισότητα για όγκους περιέχει, ως συνέπειες, θεμελιώδη αποτελέσματα όπως την ισοπεριμετρική ανισότητα, τη θεωρία των μικτών όγκων, την ανισότητα Minkowski, καθώς και συναρτησιακές ανισότητες τύπου Prékopa–Leindler και Borell–Brascamp–Lieb. Στην εργασία μελετάται η αντίστοιχη ανισότητα για το γκαουσιανό μέτρο και η πρόσφατη επίλυση της συμμετρικής εικασίας Gardner–Zvavitch.

Κλασική Brunn–Minkowski

Έστω A, B μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\lambda \in (0,1)$, ισχύει

$$|\lambda A + (1-\lambda)B|^{1/n} \geq \lambda |A|^{1/n} + (1-\lambda)|B|^{1/n},$$

όπου $|\cdot|$ δηλώνει τον n-διάστατο όγκο Lebesgue.

Λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ένα Borel μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε Borel σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mu(A)^{\lambda}\mu(B)^{1-\lambda}.$$

Ένα μέτρο πιθανότητας είναι λογαριθμικά κοίλο αν και μόνο αν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει λογαριγμικά κοίλη πυκνότητα. Παίρνοντας σύνολα K, L με το L να μετατοπίζεται μακριά από το 0 διαπιστώνουμε ότι η ανισότητα δεν μπορεί να γενικευτεί για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Με την επιπλέον υπόθεση συμμετρικότητας για τα σύνολα, το πρόβλημα παραμένει ανοιχτό για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας, όμως λύθηκε για το μέτρο του Gauss από τους Εσκενάζη και Μοσχίδη.

Το μέτρο του Gauss

Το μέτρο του Gauss έχει πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue,

$$d\gamma_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2}\, dx.$$

Το γκαουσιανό μέτρο είναι λογαριθμικά κοίλο. Το βασικό αντικείμενο της εργασίας είναι η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος:
Έστω $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ συμμετρικά κυρτά σύνολα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$, ισχύει

$$\gamma_n(\lambda K + (1-\lambda)L)^{1/n} \geq \lambda \gamma_n(K)^{1/n} + (1-\lambda)\gamma_n(L)^{1/n}.$$

Το θεώρημα Kolesnikov - Livshyts

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\delta \in [0,1]$ τέτοιο ώστε για κάθε K συμμετρικό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ κάθε συμμετρική λεία συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$ με $Lu = 1$ στο K ικανοποιεί

$$\int \|\nabla^2 u\|_{HS}^2 + |\nabla u|^2 \, d\gamma_K \geq \frac{\delta}{n}.$$

Τότε για κάθε K, L συμμετρικά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει

$$\gamma_n(K + (1-\lambda)L)^{\frac{\delta}{n}} \geq (1-\lambda)\gamma_n(L)^{\frac{\delta}{n}} + \gamma_n(K)^{\frac{\delta}{n}}.$$

Συμβολισμός:

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2, \quad Lu(x) = u(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u(x), \quad \gamma_K(A) = \frac{\gamma_n(A \cap K)}{\gamma_n(K)}.$$

Το θεώρημα των Εσκενάζη και Μοσχίδη

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε K συμμετρικό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, κάθε λεία συμμετρική συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $Lu = 1$ στο K ικανοποιεί

$$\int \|\nabla^2 u\|_{HS}^2 + |\nabla u|^2 \, d\gamma_K \geq \frac{1}{n}.$$

Απόδειξη: Συμβολίζουμε $\hat{A} = A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{n} Id$, το traceless μέρος του A. Οπότε για λεία συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$, όπου το K είναι κυρτό και συμμετρικό σύνολο, έχουμε

$$\hat{\nabla}^2 u = \nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} Id.$$

Επομένως λόγω ορθογωνιότητας έχουμε

$$\|\nabla^2 u\|_{HS}^2 = \|\hat{\nabla}^2 u\|_{HS}^2 + \frac{(\Delta u)^2}{n}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ταυτότητες με την εξίσωση $Lu = 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 u\|_{HS}^2 &= \|\nabla^2 (u - r)\|_{HS}^2 + \frac{2}{n}\Delta u - \frac{1}{n} \\ &= \|\nabla^2 (u - r)(x)\|_{HS}^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u(x) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Για την απόδειξη είναι απαραίτητη η ανισότητα Brascamp-Lieb: Έστω $\beta > 0$ και $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\nabla^2 V \geq \beta Id$. Τότε, αν $d\mu(x) = e^{-V(x)}$, για κάθε λεία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathrm{Var}_{\mu}(f) := \int f^2 \, d\mu - \left(\int f \, d\mu \right)^2 \leq \frac{1}{\beta} \int |\nabla f(x)|^2 \, d\mu(x)$$

Ειδικότερα, αφού κάθε $\partial_i(u - r)$ είναι περιττή και το K συμμετρικό, έχουν μέση τιμή 0, ως προς το γ_K και επομένως

$$\sum_{j=1}^{n} \int (\partial_i \partial_j (u - r))^2 \, d\gamma_K \geq$$

$$\mathrm{Var}_{\gamma_K}(\partial_i(u - r)) = \int (\partial_i(u - r))^2 \, d_{\gamma_K}.$$

Παίρνοντας άθροισμα ως προς i καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \int \|\nabla^2 (u - r)\|_{HS}^2 \, d\gamma_K &\geq \sum_{i=1}^{n} \int \left(\partial_i u(x) - \frac{x_i}{n} \right)^2 d\gamma_K \\ &= \int |\nabla u(x)|^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u(x) + \frac{|x|^2}{n^2} \, d\gamma_K. \end{aligned}$$

Τέλος συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με την προηγούμενη ταυτότητα παίρνουμε

$$\int \|\nabla^2 u\|_{HS}^2 + |\nabla u|^2 \, d\gamma_K \geq \int 2|\nabla u(x)|^2 + \frac{|x|^2}{n^2} + \frac{1}{n} \, d\gamma_K \geq \frac{1}{n}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Βιβλιογραφία

1. Eskenazis, I., Moschidis, G., *The dimensional Brunn–Minkowski inequality in Gauss space*, J. Funct. Anal. 280 (2021), Article 108914.
2. Kolesnikov, A.V., Livshyts, G.V., *On the Gardner–Zvavitch conjecture: Symmetry in inequalities of Brunn–Minkowski type*, Adv. Math. 384 (2021), 107689.
3. Colesanti, A., Fradelizi, M., Li, P., Zvavitch, A., *The Gaussian Brunn–Minkowski inequality*, J. Funct. Anal. 273 (2017), 1120–1139.
4. Gardner, R.J., *The Brunn–Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 355–405.
5. Schneider, R., *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
6. Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
7. Brazitikos, S., *Klartag Notes: Introduction to Log-Concave Measures*, Unpublished lecture notes.
8. Kolesnikov, A.V., Milman, E., *Poincaré and Brunn–Minkowski inequalities on the boundary of weighted Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 143 (2021), 1611–1652.