



## Οι τύποι Area–Coarea

Παναγιώτης Χουδαλάκης

mathp399@math.uoc.gr pchoudalakis@gmail.com

Επιβλέπων καθηγητής: Θεμιστοκλής Μήτσης

### Εισαγωγή

Η εργασία αυτή αποτελεί μια μελέτη πάνω στους τύπους Area και Coarea, οι οποίοι αποδείχθηκαν πρώτα από τον Γερμανό μαθηματικό Herbert Federer τις δεκαετίες του 1950 και του 1960. Και οι δύο τύποι αφορούν συναρτήσεις Lipschitz  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

Εάν  $n \leq m$ , παίρνουμε τον τύπο **Area** ο οποίος δίνει ένα τρόπο υπολογισμού του  $n$ -διάστατου μέτρου της εικόνας της  $f$ , λαμβάνοντας υπόψη την πολλαπλότητα.

Εάν  $n \geq m$ , παίρνουμε τον τύπο **Coarea** ο οποίος συνδέει το ολοκλήρωμα του  $n - m$ -διάστατου μέτρου των level-sets της  $f$  με το ολοκλήρωμα της Ιακωβιανής της  $f$ . Αυτό αποτελεί μια γενίκευση του θεωρήματος του Fubini.

### Τύπος Area

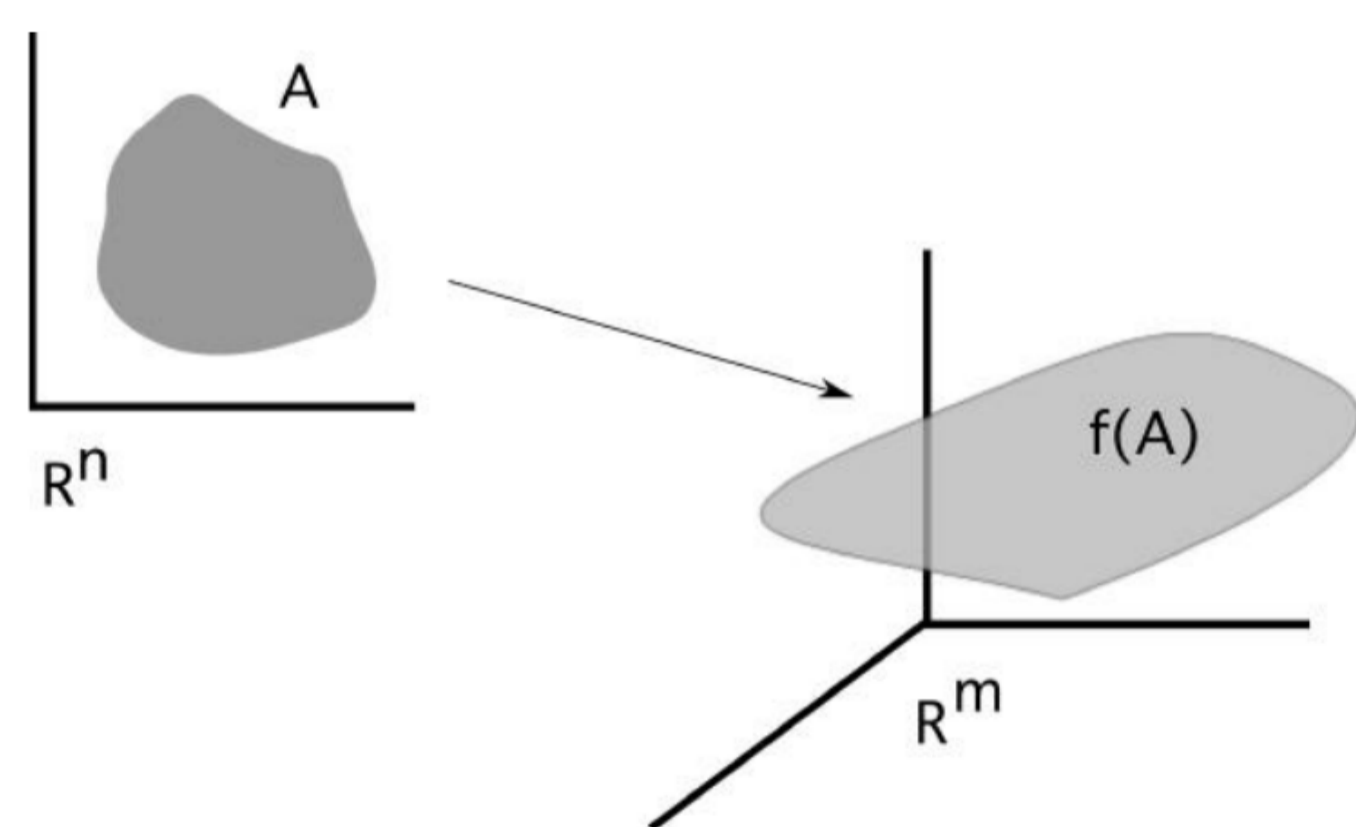
Από τον απειροστικό λογισμό γνωρίζουμε τον τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού μιας λείας επιφάνειας στον  $\mathbb{R}^3$ . Ο τύπος Area γενικεύει για εικόνες Lipschitz συναρτήσεων στον  $\mathbb{R}^m$ .

#### Θεώρημα (Area formula)

Έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , Lipschitz συνεχής,  $n \leq m$  και  $A$  ένα  $\mathcal{L}^n$ -μετρήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε

$$\int_A Jf(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y)$$

**Σημείωση:** Η συνάρτηση  $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$  ονομάζεται *συνάρτηση πολλαπλότητας*, και μετράει το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $A \cap f^{-1}\{y\}$  για κάθε  $y \in \mathbb{R}^m$ . Στη περίπτωση που η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, η συνάρτηση πολλαπλότητας είναι ίση με τη χαρακτηριστική του συνόλου  $f(A)$ .

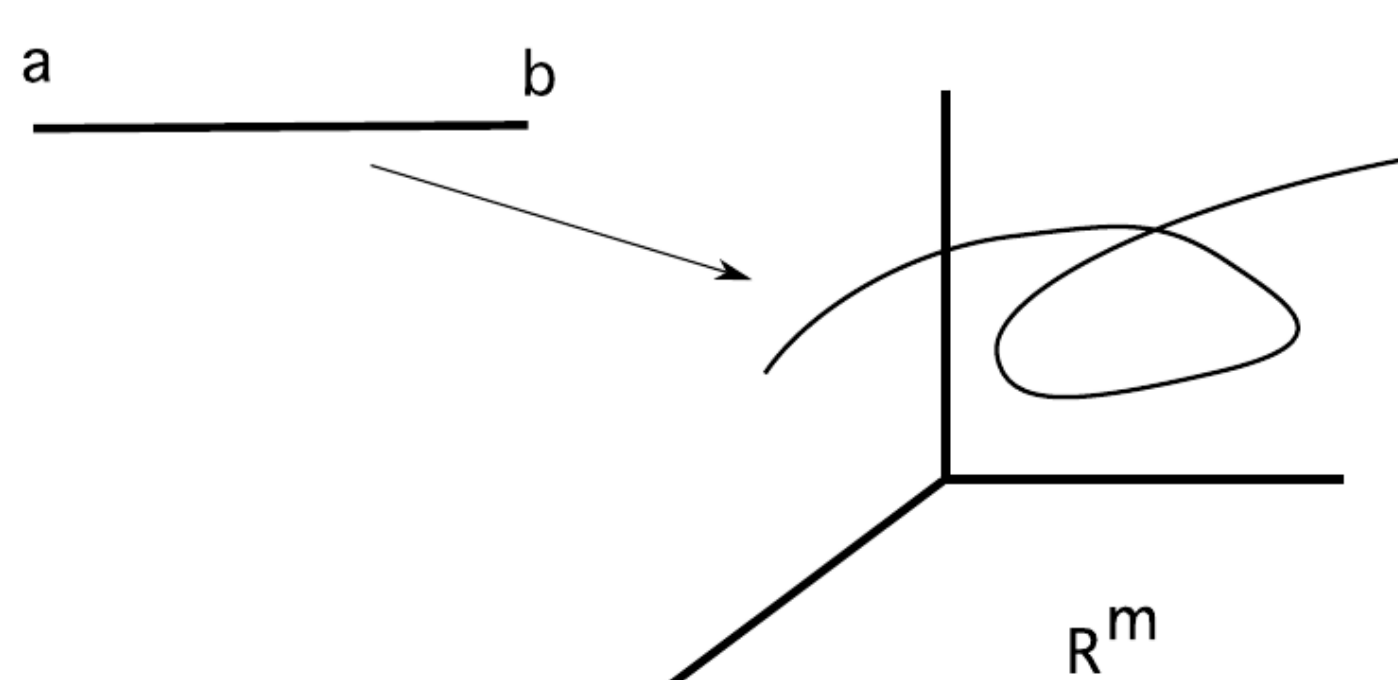


**Τύπος αλλαγής μεταβλητής:** Εάν επιπλέον έχουμε μία συνάρτηση  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{L}^n$ -ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int_A g(x) Jf(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] d\mathcal{H}^n(y)$$

**Μία εφαρμογή (μήκος καμπύλης):** Ας πάρουμε  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  μια 1-1 και Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε  $Jf = \sqrt{Df \cdot Df^T} = |Df|$ . Επομένως, αν θεωρήσουμε την καμπύλη  $C = f([a, b])$ , ο τύπος Area δίνει το μέτρο της καμπύλης  $C$ :

$$\int_a^b |Df(x)| dx = \int_C d\mathcal{H}^1(y) = \mathcal{H}^1(C)$$



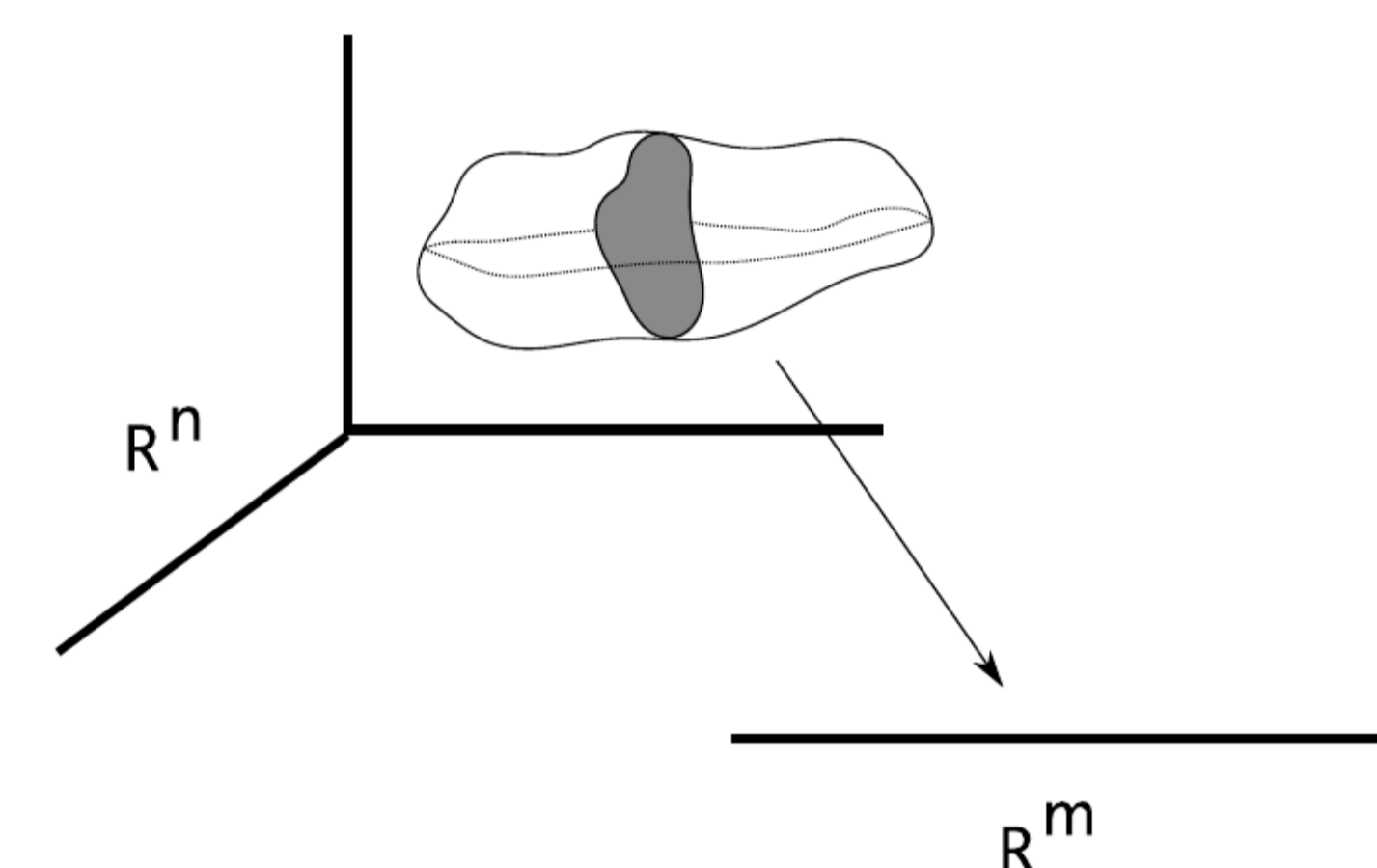
### Τύπος Coarea

Από το θεώρημα του Fubini γνωρίζουμε ότι για να υπολογίσουμε το μέτρο ενός συνόλου στον  $\mathbb{R}^2$ , αρκεί να πάρουμε την τομή του συνόλου με κάθε ευθεία  $y = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσουμε το μήκος κάθε τέτοιας τομής και στη συνέχεια να αθροίσουμε όλα αυτά τα μήκη. Προκύπτει ένα ερώτημα: Μπορούμε να πάρουμε τομές με άλλα σύνολα; Σε αυτό το ερώτημα δίνει απάντηση ο τύπος Coarea, γενικεύοντας κατά πολύ το θεώρημα του Fubini.

#### Θεώρημα (Coarea formula)

Έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lipschitz συνεχής,  $n \geq m$  και  $A$  ένα  $\mathcal{L}^n$ -μετρήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε

$$\int_A Jf(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy$$



**Τύπος αλλαγής μεταβλητής:** Εάν επιπλέον έχουμε μία συνάρτηση  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{L}^n$ -ολοκληρώσιμη, τότε η  $g|_{f^{-1}\{y\}}$  είναι  $\mathcal{H}^{n-m}$  ολοκληρώσιμη για  $\mathcal{L}^m$ -σχεδόν κάθε  $y$ , και

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{f^{-1}\{y\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) \right) dy$$

**Μία εφαρμογή (πολικές συντεταγμένες):** Αν  $f(x) = |x|$ , τότε  $Jf(x) = 1$  και άρα από τον παραπάνω τύπο:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(0,r)} g(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) \right) dr$$

### Δύο λόγια για τις αποδείξεις

Για την απόδειξη και των δύο θεωρημάτων ακολουθούμε την ίδια στρατηγική:

1. Αποδεικνύουμε τον τύπο στη περίπτωση που το σύνολο  $A$  είναι υποσύνολο του  $\{Jf > 0\}$ .
2. Θεωρώντας κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση Lipschitz  $g$ , η οποία έχει θετική και φραγμένη από μία ποσότητα -την οποία μπορούμε να κάνουμε όσο μικρή θέλουμε- Ιακωβιανή, αποδεικνύουμε τον τύπο στην περίπτωση που  $A \subseteq \{Jf = 0\}$ , με εφαρμογή της πρώτης περίπτωσης για τη συνάρτηση  $g$ .
3. Στη γενική περίπτωση, γράφουμε  $A = A_1 \cup A_2$  όπου  $A_1 \subseteq \{Jf > 0\}$  και  $A_2 \subseteq \{Jf = 0\}$ .

### Συμβολισμός

$\mathcal{L}^n$ :  $n$ -διάστατο μέτρο Lebesgue.

$\mathcal{H}^n$ :  $n$ -διάστατο μέτρο Hausdorff.

$Jf$ : Ιακωβιανή της  $f$ .

$Df$ : Παράγωγος της  $f$ .