Εισαγωγικές μεταπτυχιακές εξετάσεις
Μεταπτυχιακό πρόγραμμα: Μαθηματικά και Εφαρμογές τους

26 Μαΐου 2025

Διάρκεια 4 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

(**1**) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{e}-1), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\int_1^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}.$$

(**2**) Εξετάστε για ποια $a, b \in (0, +\infty)$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)^b.$$

(**3**) Βρείτε τα σημεία συνέχειας και παραγωγισιμότητας της συνάρτησης $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \ \text{ ή } \ x = 0; \\ 1/q, & x = p/q, \quad \text{όπου } p, q \in \mathbb{N}, p \le q \text{ είναι σχετικά πρώτοι.} \end{cases}$$

(**4**) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^3 \int_0^{9-y^2} \frac{ye^{3x}}{9-x}\,dx\,dy, \qquad \iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

όπου $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 16, \quad x > 2\}$.

(**5**) Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$f(x,y,z) = g(r), \qquad \text{όπου} \qquad r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Αν η f έχει παραγώγους 2ης τάξης στον $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \qquad \text{στον} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

δείξτε ότι

$$\frac{2}{r}g'(r) + g''(r) = 0, \qquad r \neq 0.$$

Συμπεράνετε ότι

$$g(r) = a + \frac{b}{r}, \qquad r \neq 0,$$

για κατάλληλες σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$.

(**6**) Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι για κάθε $v \in \mathcal{C}$ υπάρχει $u \in \mathcal{B}$ τ.ω. το σύνολο $\mathcal{B} \setminus \{u\} \cup \{v\}$ να είναι βάση του χώρου V.

Υπόδειξη: Γράψτε το $v \in \mathcal{C}$ ως γραμμικό συνδυασμό στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$ και αντικαταστήστε κατάλληλα κάποιο στοιχείο της βάσης $\mathcal{B}$ με το v.

(**7**) Εστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ διαφορετικές ανα δύο ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Να δείξετε ότι

(i) Τα $v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(ii) Για κάθε $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ το $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της f.

(**8**) Έστω $W_{m,n}$ το σύνολο των πινάκων στο $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ των οποίων τα στοιχεία κάθε γραμμής και κάθε στήλης έχουν άθροισμα μηδεν.

(i) Δείξτε ότι ο $W_{m,n}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(ii) Υπολογίστε τη διάσταση του $W_{3,n}$ για τυχαίο n και περιγράψτε μία βάση.

(iii) Θεωρήστε τη γραμμική απεικόνιση $T : W_{3,3} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ με $T(A) = A'$ όπου A' είναι ο 2×2 πίνακας που προκύπτει αν διαγράψουμε την τελευταία γραμμή και τελευταία στήλη του A. Να βρεθούν τα $\mathrm{Im}(T)$ και $\mathrm{Ker}(T)$.

(**9**) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των συμμετρικών πολυωνύμων βαθμού ≤ 4 με πραγματικούς συντελεστές. Δηλαδή $V = \{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a : a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T : V \to V$ με

$$T(p(x)) = p'(x) + x^4 p'(\tfrac{1}{x}).$$

(i) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{p_1(x) = x^4 + 1, p_2(x) = x^3 + x, p_3(x) = x^2\}$ είναι βάση του V.

(ii) Βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης T ως προς την παραπάνω βάση.

(iii) Είναι η T διαγωνίσιμη απεικόνιση;

(**10**) Έστω $f : V \to V$ και $g : V \to V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει $f \circ g = g \circ f$. Έστω λ ιδιοτιμή της f με αντίστοιχο ιδιόχωρο $V_f(\lambda)$. Δείξτε ότι ο $V_f(\lambda)$ είναι g-αναλλοίωτος υπόχωρος του V δηλαδή ότι αν $v \in V_f(\lambda)$ τότε $g(v) \in V_f(\lambda)$.
