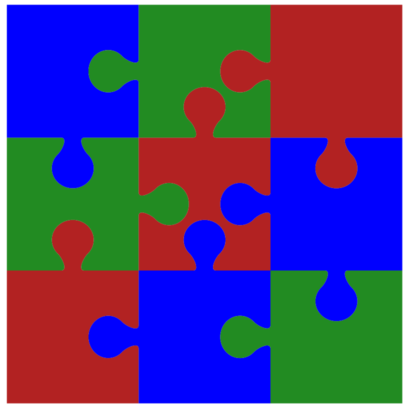
Tilings της ευθείας φραγμένης πυκνότητας

Σπυριδάκης Μάνος

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Εισαγωγή

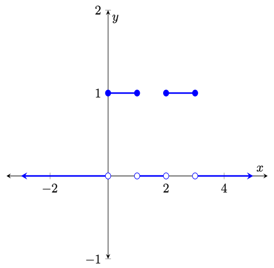
Όλοι γνωρίζουμε τη διαδικασία επίλυσης ενός puzzle. Ο κατασκευαστής ενός puzzle δεδομένου ενός χωρίου (συνήθως ορθογώνιο) του επιπέδου βρίσκει τα κομμάτια του puzzle και δείχνει ότι αν τα μεταφέρουμε κατάλληλα στο χωρίο αυτό, το αποτέλεσμα είναι ότι το χωρίο θα έχει καλυφθεί ολόκληρο από τα κομμάτια του puzzle δίχως να υπάρχουν κενά ανάμεσα τους. Με άλλα λόγια ο κατασκευαστής έδειξε ότι τα κομμάτια του puzzle που βρήκε δίνουν tiling του δεδομένου χωρίου. Εμείς απλά οφείλουμε να βρούμε τις κατάλληλες θέσεις των κομματιών στο χωρίο που ο κατασκευαστής γνωρίζει.



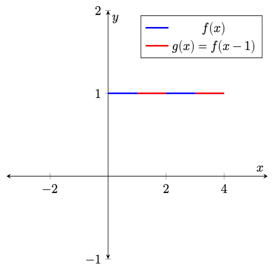
Στα μαθηματικά υπάρχει ένας ολόκληρος κλάδος που μελετά τρόπους με τους οποίους μπορούμε να καλύψουμε χώρους από μεταφορές γεωμετρικών αντικειμένων με την ονομασία Tilings by translates. Ο κλάδος αυτός φαίνεται να ξεκίνησε από το Ρώσσο κρυσταλλογράφο Yevgraf Fyodorov το 1891 που απέδειξε ότι κάθε περιοδικό tiling του επιπέδου προκύπτει από ένα εκ των δεκαεπτά διαφορετικών ομάδων ισομετριών.

Tilings της ευθείας

Τι εννοούμε όταν λέμε Tiling της ευθείας από μεταφορές μιας συνάρτησης; Το ακόλουθο αν και τετριμμένο παράδειγμα θα μας βοηθήσει ώστε να δώσουμε έναν μαθηματικό ορισμό του tiling. Θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της ένωσης των διαστημάτων $[0,1]$ και $[2,3]$ που τη συμβολίζουμε με f, η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν τώρα θεωρήσουμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = f(x-1)$ η συνάρτηση f μαζί με τη g θα έχουν καλύψει το διάστημα [0,4] όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Ισοδύναμα έπεται ότι $f + g = \chi_{[0,4]}$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Tilings της ευθείας

Από το προηγούμενο διαπιστώνει κανείς ότι οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[4k, 4k+4]$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ καλύπτεται (μία φορά) από δύο μεταφερμένα αντίγραφα της f, τα $f(x-4k)$, $f(x-4k+1)$. Καθώς η ξένη ένωση $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[4k, 4k+4]$ ισούται με την πραγματική ευθεία και κάθε τέτοιο διάστημα καλύπτεται (μία φορά) από μεταφορές της f έπεται ότι όλες αυτές οι μεταφορές μαζί καλύπτουν ολόκληρη την ευθεία ακριβώς μία φορά. Δηλαδή:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-4k) + f(x-4k+1) = \chi_{\mathbb{R}}$$

για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\mathrm{A} = 4\mathbb{Z} + \{0,1\}$ τότε η προηγούμενη ισότητα μπορεί να γραφεί:

$$\sum_{a\in A} f(x-a) = \chi_{\mathbb{R}}(x)$$

για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$. Φυσικά η απαίτηση του να καλύπτεται η ευθεία από μεταφορές μίας συνάρτησης ακριβώς μία φορά παραείναι ισχυρή: Η συνάρτηση $h(x) = \chi_{[0,1]\cup[2,4]}$ δε μπορεί να καλύψει την ευθεία ακριβώς μία φορά αλλά μπορεί να την καλύψει τρεις φορές με μεταφορές από το σύνολο $A := \mathbb{Z}$. Έτσι όταν μιλάμε για tiling της ευθείας από μεταφορές μίας συνάρτησης f θα πρέπει να έχουμε στο νου μας τρία πράγματα:

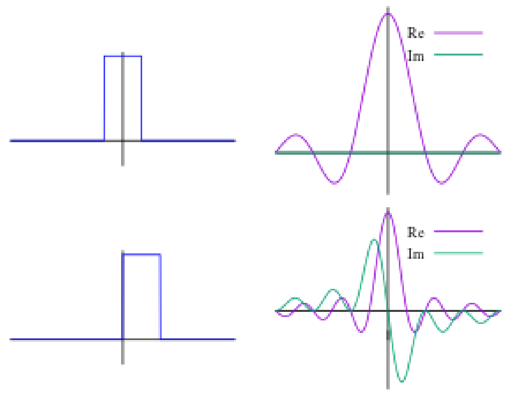
1) Τη συνάρτηση f, οι μεταφορές της οποίας καλύπτουν την ευθεία.
2) Το σύνολο A των μεταφορών (ή αντιγράφων) της f που συμβάλουν στην κάλυψη της ευθείας
3) Ο αριθμός των φορών που καλύπτεται η ευθεία που τον λέμε ύψος του tiling και το συμβολίζουμε συνήθως με w.

Ο μετασχηματισμός Fourier

Βασικό ρόλο στη μελέτη των tiling είναι η ανάλυσης Fourier. Ο κλάδος αυτός των μαθηματικών πήρε το όνομα αυτό από τον Joseph Fourier ο οποίος μέσα από το έργο του "Théorie analytique de la chaleur" απλοποίησε το πρόβλημα της Θερμότητας αναπαριστώντας συναρτήσεις ως αθροίσματα ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών συναρτήσεων. Το σημαντικότερο ίσως εργαλείο του κλάδου αυτού είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Πρόκειται για μία γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε συνεχείς που μηδενίζονται καθώς η μεταβλητή τους τείνει στο άπειρο,ο τύπος της οποίας είναι ο ακόλουθος:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ και ολοκληρώσιμη συνάρτηση f. Οι χρήσιμες ιδιότητές του και τα συμπεράσματα που μπορούμε να βγάλουμε για μία συνάρτηση μελετόντας το μετασχηματισμό Fourier τους, οδήγησαν τους μαθηματικούς στη γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier σε πιο αφηριμένους χώρους όπως ο χώρος των tempered κατανομών αλλά και σε τοπικά συμπαγείς αβελιανές ομάδες.



Η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $[-1/2, 1/2]$ πάνω αριστερά και η γραφική παράσταση του πραγματικού και φανταστικού μέρους του μετασχηματισμού Fourier της δεξιά. Αντίστοιχα κάτω για τη μεταφορά της κατά $1/2$.

Ο ρόλος της αρμονικής ανάλυσης στα tilings

Πώς χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Fourier στα tiling; Η ιδέα είναι σχετικά απλή: Για μία συνάρτηση f το γεγονός ότι δίνει tiling ύψους $w \in \mathbb{R}$ με μεταφορές από ένα σύνολο A ισοδυναμεί με την ακόλουθη ισότητα:

$$f \star \mu_A(x) = w$$

για σ.κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εδώ μ_A είναι το μέτρο στο οποίο εφαρμόζουμε ένα οποιοδήποτε σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ και παίρνουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A που ανήκουν στο E. Παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier στην παραπάνω ισότητα προκύπτει η ακόλουθη ισότητα κατανομών:

$$\hat{f}\hat{\mu}_A = (2\pi w)\delta_0$$

Η ισότητα αυτή μας λέει ότι ο φορέας της $\hat{\mu}_A$ περιέχεται στο σύνολο όπου μηδενίζεται η συνάρτηση $\hat{f}$ μαζί με το $\{0\}$. Βέβαια για να μπορούμε να πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier στην $f \star \mu_A = w$ χρειαζόμαστε κάποιες επιπλέον υποθέσεις τόσο για τη συνάρτηση f όσο και για το μέτρο μ_A ως κατανομή. Ωστόσο με την απλή παρατήρηση που μόλις κάναμε δώσαμε έναν χαρακτηρισμό για το πότε μία συνάρτηση f δίνει tiling της ευθείας.

Δομή των Tile sets

Έχοντας λοιπόν βρει έναν χαρακτηρισμό για το πότε μία συνάρτηση (υπό προϋποθέσεις) δίνει tiling της ευθείας μας ενδιαφέρει να βρούμε και τον τρόπο με τον οποίο υλοποιείται ένα τέτοιο tiling. Για το λόγο αυτό θέτουμε τις εξής ερωτήσεις:

1) Είναι δυνατό για μία συνάρτηση να καλύψουμε με μεταφορές της ένα φραγμένο διάστημα της ευθείας και στη συνέχεια να πάρουμε μεταφερμένες επαναλήψεις αυτών προκειμένου να καλύψουμε ολόκληρη την ευθεία όπως κάναμε στο παράδειγμα που δώσαμε στην αρχή; Ισοδύναμα, πότε μία συνάρτηση δίνει περιοδικό tiling;
2) Υπάρχουν συναρτήσεις που δίνουν μόνο περιοδικά tiling και tiling με μεταφορές από ενώσεις περιοδικών συνόλων; Τέτοια σύνολα τα λέμε σύνολα φραγμένης πυκνότητας και τα tiling με μεταφορές από αυτά τα σύνολα τα λέμε επίσης φραγμένης πυκνότητας.
3) Αν έχουμε ένα περιοδικό σύνολο, μπορούμε να βρούμε συνάρτηση που να δίνει tiling της ευθείας με μεταφορές από αυτό το σύνολο;

Η απάντηση τόσο στο πρώτο όσο και στο δεύτερο ερώτημα οφείλεται σε ένα θεώρημα των Κολουντζάκης και Lagarias που χοντρικά αναφέρει ότι για συναρτήσεις με συμπαγή φορέα (μαζί με κάποιες άλλες υποθέσεις) που δίνουν tiling της ευθείας τα αντίστοιχα tile sets είναι περιοδικά (ή ενώσεις περιοδικών συνόλων).
Η απάντηση στο τρίτο ερώτημα είναι σχεδόν τετριμμένη: Ένα περιοδικό σύνολο της ευθείας έχει τη μορφή $a\mathbb{Z} + \mathrm{B}$ όπου το σύνολο B είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $a > 0$ η περίοδος του συνόλου. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $[0, a]$ είναι εκείνη που δίνει tiling της ευθείας ύψους ακριβώς όσο ο πληθάριθμος του συνόλου B (αν δεν είναι κενό) και ένα αλλιώς με μεταφορές από το παραπάνω σύνολο.
Κανείς μετά αναρωτιέται πως για δεδομένη ένωση τέτοιων συνόλων μπορούμε πάντα να βρούμε συνάρτηση που να δίνει tiling μέσω αυτού του συνόλου; Ένα άλλο ερώτημα είναι το εξής: Για μία συνάρτηση που δίνει tiling της ευθείας υπάρχουν tile sets που οι ενώσεις αυτών δίνουν όλα τα tiling της ευθείας από αυτή τη συνάρτηση;
Σε αυτά αλλά και σε άλλα ερωτήματα σχετικά με τα tiling απαντάμε στην εργασία και δίνουμε κάποια παραδείγματα μη τετριμμένων tiling.