



Μηδενικά Ανάγωγων Χαρακτήρων Πεπερασμένων Ομάδων

Νίκη Σπιθάκη

Επιβλέπουσα: Μαρία Λουκάκη

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή εστιάζουμε στα μηδενικά των μη-γραμμικών χαρακτήρων και τα συμπεράσματα που προκύπτουν τόσο για τους ίδιους τους χαρακτήρες όσο και για την ομάδα, αν ξέρουμε το πλήθος των μηδενικών των ανάγωγων χαρακτήρων της ή το μέσο όρο τους. Ο τρόπος που το πλήθος των μηδενικών των ανάγωγων χαρακτήρων μιας ομάδας επηρεάζει την ίδια την δομή της ομάδας έχει μελετηθεί από τους Chillag [1], Madanha [2], Navarro [3] και Yang [4], των οποίων τα σημαντικότερα αποτελέσματα μελετήσαμε και συγκεντρώσαμε σε αυτή την εργασία.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφερόμαστε σε θεμελιώδη στοιχεία της Θεωρίας Αναπαραστάσεων. Στο δεύτερο κεφάλαιο εμβαθύνουμε σε δυο ειδικά θέματα της θεωρίας: τις ομάδες Frobenius και τις χαρακτηριστικές τριάδες. Τα θεωρήματα που αφορούν το πλήθος των σημείων μηδενισμού των χαρακτήρων μιας ομάδας παρουσιάζονται στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο. Βασιζόμενοι στα άρθρα που έχουμε ήδη αναφέρει, παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα τους.

Το Θεώρημα του Burnside

Έστω $\chi \in \text{Irr}(G)$ με $\chi(1) > 1$. Τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $\chi(g) = 0$.

Με άλλα λόγια, κάθε (μη-γραμμικός) χαρακτήρας μίας ομάδας μηδενίζεται σε τουλάχιστον ένα στοιχείο της. Το πλήθος των σημείων μηδενισμού των χαρακτήρων μίας ομάδας μας δίνει πληροφορία τόσο για τους ίδιους τους χαρακτήρες όσο και για την ομάδα και τα στοιχεία της.

Κλάσεις συζυγίας σημείων μηδενισμού

Παρουσιάζουμε μερικά αποτελέσματα που συσχετίζουν το πλήθος των κλάσεων συζυγίας μιας ομάδας G , στις οποίες μηδενίζεται ένας ανάγωγος χαρακτήρας χ , με το μέγεθος του κεντροποιητή κάποιου στοιχείου της G .

• Έστω G μία πεπερασμένη, μη-αβελιανή ομάδα τέτοια ώστε $G \neq G'$, και έστω χ ένας μη-γραμμικός ανάγωγος χαρακτήρας της G . Έστω επίσης m το πλήθος των κλάσεων συζυγίας στις οποίες μηδενίζεται ο χ . Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

- Υπάρχει $x \in G$ τέτοιο ώστε $|C_G(x)| \leq 2m$. Το x αυτό μπορεί να επιλεγθεί από οποιαδήποτε κλάση μεγιστικού μεγέθους ανάμεσα σε εκείνες όπου μηδενίζεται ο χ .
- Ισχύουν $\phi = \chi_{G'} \in \text{Irr}(G')$ και $\phi^G = \sum_{\lambda \in \text{Lin}(G)} \chi \lambda$. Επιπλέον, το σύνολο $\{\chi \lambda \mid \lambda \in \text{Lin}(G)\}$ αποτελείται από ακριβώς $|G : G'|$ επεκτάσεις του ϕ , και αυτές είναι όλες. Ειδικότερα, ο ϕ δεν είναι γραμμικός και $G'' \neq 1$.

• Έστω G πεπερασμένη, μη-αβελιανή ομάδα, $G \neq G'$. Για κάθε $\chi \in \text{Irr}(G)$ θέτουμε n_χ το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G όπου μηδενίζεται ο χ . Έστω $m = \max\{n_\chi \mid \chi \in \text{Irr}(G)\}$. Υποθέτουμε ότι $|C_G(x)| > 2m$ για κάθε $x \in G$. Τότε ισχύουν:

- Για κάθε $\chi \in \text{Irr}(G)$ έχουμε $\chi_{G'} \in \text{Irr}(G')$, το σύνολο $\{\chi \lambda \mid \lambda \in \text{Lin}(G)\}$ αποτελείται από ακριβώς $|G : G'|$ επεκτάσεις του $\chi_{G'}$ και αυτές είναι όλες.
- Κάθε $\phi \in \text{Irr}(G')$ είναι της μορφής $\chi_{G'}$, $\chi \in \text{Irr}(G)$.
- $G'' = G'$.
- Κάθε G' -κλάση συζυγίας είναι και G -κλάση συζυγίας.
- Κάθε μη-γραμμικός ανάγωγος χαρακτήρας της G μηδενίζεται σε τουλάχιστον μία κλάση συζυγίας που βρίσκεται εκτός της G' και σε τουλάχιστον μία κλάση που ανήκει στη G' .

• Έστω G πεπερασμένη, μη-αβελιανή ομάδα με $Z(G) \neq 1$ και C μία κλάση συζυγίας της G τέτοια ώστε $C \not\subseteq Z(G)$. Έστω m το πλήθος των ανάγωγων χαρακτήρων της G που μηδενίζονται στην C . Ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

- Υπάρχει $\chi \in \text{Irr}(G)$ τέτοιος ώστε

$$\frac{|G|}{\chi^2(1)} \leq 2m.$$

Ο χαρακτήρας χ μπορεί να επιλεγθεί ανάμεσα στους ανάγωγους χαρακτήρες μέγιστου βαθμού που μηδενίζονται στην κλάση C .

- Αν $c \in C$, τότε

$$|Cl_{G/Z(G)}(cZ(G))| = |C|.$$

Ειδικότερα, η $G/Z(G)$ δεν είναι αβελιανή.

Περιορισμοί χαρακτήρων και σημεία μηδενισμού

Έστω G μία πεπερασμένη ομάδα, $N \trianglelefteq G$ και $\chi \in \text{Irr}(G)$. Δίνουμε έναν χαρακτηρισμό για το πότε ο χαρακτήρας χ_N είναι ανάγωγος:

Έστω G πεπερασμένη ομάδα, $N \trianglelefteq G$ και $\chi \in \text{Irr}(G)$. Τότε ο χ_N δεν είναι ανάγωγος αν και μόνο αν ο χ μηδενίζεται σε κάποιο σύμπλοκο Nx της N στη G .

Επιλύσιμες ομάδες και σημεία μηδενισμού

Περνάμε τώρα στην ειδική περίπτωση όπου η G είναι μία επιλύσιμη ομάδα. Για κάθε $\chi \in \text{Irr}(G)$ θέτουμε

$$m(\chi) = |\{C \in Cl(G) \mid \chi(x) = 0 \ \forall x \in C\}|,$$

όπου με $Cl(G)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων συζυγίας της G . Έστω $m(G) = \max_{\chi \in \text{Irr}(G)} m(\chi)$. Αποδεικνύεται ότι:

Ο δείκτης $|G : F_8(G)|$ φράσσεται από συνάρτηση του $m(G)$. Αν επιπλέον η $|F_8(G)|$ είναι περιττός αριθμός, τότε ο δείκτης $|G : F(G)|$ φράσσεται από συνάρτηση του $m(G)$.

Μέση τιμή μηδενικών ανάγωγων χαρακτήρων

Ορίζουμε τη μέση τιμή μηδενικών των ανάγωγων χαρακτήρων μιας πεπερασμένης ομάδας G ως το πηλίκο του πλήθους των μηδενικών του πίνακα χαρακτήρων της G , $\text{nz}(G)$, προς το πλήθος των ανάγωγων χαρακτήρων της. Συμβολίζουμε την μέση τιμή με $\text{anz}(G)$ και τότε έχουμε

$$\text{anz}(G) = \frac{\text{nz}(G)}{|\text{Irr}(G)|}.$$

Γνωρίζοντας κάποιο φράγμα της μέσης τιμής, καταλήγουμε σε πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα σχετικά με τη δομή την ομάδας G , μερικά από τα οποία είναι τα ακόλουθα:

- Αν $\text{anz}(G) < 1$, τότε η G είναι επιλύσιμη.
- Αν $\text{anz}(G) < \frac{1}{2}$, τότε η G είναι supersolvable.
- Αν $\text{anz}(G) < \frac{1}{3}$, τότε η G είναι μηδενοδύναμη.
- Η G είναι αβελιανή αν και μόνο αν $\text{anz}(G) < \frac{1}{3}$.

Βιβλιογραφία

- Chillag D. ‘On Zeros of Characters of Finite Groups’. στο: *American Mathematical Society* 127 (1999), σσ. 977–983.
- Madanha S. Y. ‘Average number of zeros of characters of finite groups’. στο: *Journal of Algebra* 579 (2021), σσ. 353–364.
- Navarro G. ‘Irreducible restriction and zeros of characters’. στο: *American Mathematical Society* 129 (2000), σσ. 1643–1645.
- Yang Y. ‘On the number of conjugacy classes of zeros of characters and the length of solvable groups’. στο: *Communications in Algebra* 48 (2020), σσ. 3590–3593.
- James G., Liebeck M. *Representations and Characters of Groups, 2nd Edition*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2001.
- Huppert B. *Character Theory of Finite Groups*. New York: Walter de Gruyter Berlin, 1998.
- Isaacs I. M. *Character Theory of Finite Groups*. New York: Academic Press, 1994.
- Isaacs I. M. *Finite Group Theory*. American Mathematical Society, 2008.
- Isaacs I. M. *Characters of Solvable Groups*. American Mathematical Society, 2018.
- Chillag D., Herzog M. ‘On the length of the conjugacy classes of finite groups’. στο: *Journal of Algebra* 131 (1990), σσ. 100–125.
- Gallagher P. X. ‘Zeros of characters of finite groups’. στο: *Journal of Algebra* 4 (1966), σσ. 42–45.
- Pyber L. ‘Finite groups have many conjugacy classes’. στο: *J. Lond. Math. Soc.* 46 (1992), σσ. 239–249.