Εφαρμογή Πεπλεγμένης Μεθόδου Χρονικής Προέλασης $2^{ης}$ Τάξης για την Επίλυση των Δισδιάστατων Ασυμπίεστων Εξισώσεων Navier-Stokes.

Παχάκης Νικόλαος

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

nick.pachakis@gmail.com

Περίληψη

Οι εξισώσεις των Navier-Stokes, στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής διακριτοποιούνται χρησιμοποιώντας μια μέθοδο $2^{ης}$ τάξης ακρίβειας για τον χρόνο και το χώρο. Οι εξισώσεις ορμής διακριτοποιούνται πάνω σε έκκεντρο σχήμα πεπερασμένων διαφορών $2^{ης}$ τάξης. Η λύση του γραμμικού συστήματος επιτυγχάνεται με κατάλληλη διαχείριση των αραιών πινάκων που προκύπτουν από την διακριτοποίηση και χρησιμοποιώντας GMRES. Σε κάθε χρονικό βήμα της μεθόδου, η συνθήκη ασυμπιεστότητας επιβάλλεται στο σύστημα, χρησιμοποιώντας μια τοπική μέθοδο διόρθωσης της πίεσης και στην συνέχεια ανανέωση της ταχύτητας, κελί-προς-κελί. Ικανοποιώντας έτσι το διακριτό ανάλογο της εξίσωσης συνέχειας. Η ακρίβεια και η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενενης μεθόδου ελέγχεται για διάφορα προβλήματα ασυμπίεστων ροών.

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την προσομοίωση φυσικών ροών μέσα από μια μαθηματική σκοπιά χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Navier-Stokes. Μελετώντας αυτές τις εξισώσεις σε καρτεσιανό πλέγμα χρησιμοποιώντας ένα ημιπεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα. Για την διακριτοποίηση στον χώρο και τον χρόνο επιλέγεται σχήμα ακρίβειας $2^{ης}$ τάξης και κατάλληλη μέθοδο "διόρθωσης της πίεσης" για την επιβολή της συνθήκης ασυμπιεστότητας.

Η συντηρητική, αδιάστατη μορφή των ασυμπίεστων εξισώσεων Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2}$$

όπου $\boldsymbol{u} = (u, v)$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας, p η πίεση και Re ο αριθμός Reynolds με $Re = \frac{UL}{\nu}$ όπου U η χαρακτηριστική ταχύτητα, L το χαρακτηριστικό μήκος και ν το κινηματικό ιξώδες.

Συμβολίζοντας με $\mathcal{L}(\boldsymbol{u})$ τους γραμμικούς όρους της εξίσωσης (1) και με $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}, p)$ το μέρος που περιέχει τους μη-γραμμικούς όρους μαζί με την πίεση,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{Re}\Delta\boldsymbol{u}, \quad \mathcal{N}(\boldsymbol{u}, p) = -\nabla p - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} \tag{3}$$

η μορφή που παίρνει η εξίσωση (1) γίνεται:

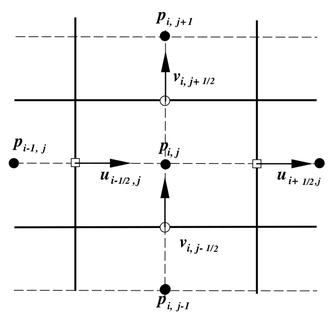
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{N}(\boldsymbol{u}, p) \tag{4}$$

Αριθμητική Μέθοδο Επίλυσης

Υπολογιστικό Χωρίο

Έστω $\Omega := [a, b]\times[c, d]$ ένα καρτεσιανό χωρίο το οποίο στην συνέχεια υποδιαιρείται σε μικρότερα κελιά $C_{i,j}$, οι πλευρές των οποίων ορίζονται από τα σημεία $x_i := a + i\Delta x,\ i = 0,\dots,i_{max}$ και $y_j := c + j\Delta y,\ j = 0,\dots,j_{max}$ όπου $\Delta x := \frac{b-a}{i_{max}}$ και $\Delta y := \frac{d-c}{j_{max}}$ για $i_{max}, j_{max}\in\mathbb{N}$. Τα κέντρα των κελιών ορίζονται ως $x_{i+\frac{1}{2}} = (i+\frac{1}{2})\Delta x$ και $y_{j+\frac{1}{2}} = (j+\frac{1}{2})\Delta y$.

Σε κάθε κελί $C_{i,j}$ η πίεση p συμβολίζεται ως $p_{i,j}$ στο κέντρο των κελιών και έχει συντεταγμένες $\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right)$. Η συνιστώσα u της ταχύτητας συμβολίζεται $u_{i+\frac{1}{2},j}$ και έχει συντεταγμένες $\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right)$, ενώ η συνιστώσα v της ταχύτητας συμβολίζεται $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ και έχει συντεταγμένες $\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right)$.



Σχήμα 1: Ανάθεση μεταβλητών πάνω σε έκκεντρο πλέγμα, όπου p και $\boldsymbol{u} = (u, v)$ είναι οι άγνωστες μεταβλητές. Με $\bullet$ συμβολίζονται οι θέσεις p, με $\square$ συμβολίζονται οι θέσεις των u και $\circ$ αυτές των v.

Για την επιβολή $2^{ης}$ τάξης ακρίβειας στις συνοριακές συνθήκες που αφορούν το πρόβλημα προστίθεται μια πλασματική σειρά κελιών στην εξωτερική πλευρά παρακείμενη σε κάθε πλευρά του φυσικού χωρίου. Με αυτό τον τρόπο το πλέγμα απαρτίζεται από τα κελιά $C_{i,j}$ με $i = 1,\dots,i_{max}+2$ και $j = 1,\dots,j_{max}+2$.

Χωρική και Χρονική Διακριτοποίηση

Από την σχέση (4) συμβολίζοντας με $\boldsymbol{u}^{n+1}$ και p^{n+1} τις τιμές της ταχύτητας και της πίεσης στον $n+1$ χρονικό βήμα,

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}{\partial t} = \mathcal{L}\left(\boldsymbol{u}^{n+1}\right) + \mathcal{N}\left(\boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}\right) \tag{5}$$

εν συνεχεία, χρησιμοποιείται ένα σχήμα 2-τάξης για την διακριτοποίηση ως προς το χρόνο.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}{\partial t} = \frac{3\boldsymbol{u}^{n+1} - 4\boldsymbol{u}^{n} + \boldsymbol{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{6}$$

Με παρεμβολή στον μη-γραμμικό όρο $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}, p)$ χρησιμοποιώντας τα δύο προηγούμενα χρονικά βήματα προκύπτει,

$$\mathcal{N}^{n+1} = 2\mathcal{N}^{n} - \mathcal{N}^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{7}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην σχέση (5) το αριθμητικό σχήμα έχει την ακόλουθη ημιπεπλεγμένη μορφή

$$\frac{3}{2}\boldsymbol{u}^{n+1} - \Delta t\mathcal{L}^{n+1} = 2\boldsymbol{u}^{n} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{n-1} - \Delta t\left[2\mathcal{N}^{n} - \mathcal{N}^{n-1}\right] \tag{8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1} = 0 \tag{9}$$

που η πλήρης αναλυτική του μορφή στις x και y διευθύνσεις έχουν την μορφή,

$$\frac{3}{2}u^{n+1} - \frac{\Delta t}{Re}\Delta u^{n+1} = 2u^{n} - \frac{1}{2}u^{n-1} + \tag{10}$$

$$+\Delta t\left\{2\left[-\frac{\partial\left(u^{n}\right)^2}{\partial x} - \frac{\partial\left(u^{n}v^{n}\right)}{\partial y} - \frac{\partial p^{n}}{\partial x}\right] - \left[-\frac{\partial\left(u^{n-1}\right)^2}{\partial x} - \frac{\partial\left(u^{n-1}v^{n-1}\right)}{\partial y} - \frac{\partial p^{n-1}}{\partial x}\right]\right\}$$

$$\frac{3}{2}v^{n+1} - \frac{\Delta t}{Re}\Delta v^{n+1} = 2v^{n} - \frac{1}{2}v^{n-1} + \tag{11}$$

$$+\Delta t\left\{2\left[-\frac{\partial\left(u^{n}v^{n}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(v^{n}\right)^2}{\partial y} - \frac{\partial p^{n}}{\partial y}\right] - \left[-\frac{\partial\left(u^{n-1}v^{n-1}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(v^{n-1}\right)^2}{\partial y} - \frac{\partial p^{n-1}}{\partial y}\right]\right\}$$

Χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές για την διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων που περιέχονται στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων (10) και (11)

$$\frac{3}{2}u_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{Re}\left[\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right] = RHS\begin{pmatrix}u_{i,j}^{n,n-1}\\ p_{i,j}^{n,n-1}\end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\frac{3}{2}v_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{Re}\left[\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right] = RHS\begin{pmatrix}v_{i,j}^{n,n-1}\\ p_{i,j}^{n,n-1}\end{pmatrix} \tag{13}$$

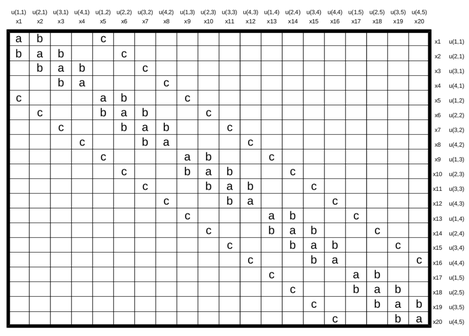
Όπως προκύπτει από τις (12) και (13) η λύση των αγνώστων μεταβλητών u^{n+1} και v^{n+1} θα δοθεί από την επίλυση των γραμμικών συστημάτων

$$\mathcal{A}_u\vec{x} = rhs\begin{pmatrix}u^{n,n-1}\\ p^{n,n-1}\end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_v\vec{y} = rhs\begin{pmatrix}v^{n,n-1}\\ p^{n,n-1}\end{pmatrix} \tag{14}$$

Τα στοιχεία των πινάκων $\mathcal{A}_u$, $\mathcal{A}_v$ δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις,

- $a_{l,l} = \frac{3}{2} + 2\frac{\Delta t}{Re}\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)$
- $b_{l-1,l} = b_{l+1,l} = -\frac{\Delta t}{Re}\frac{1}{\Delta x^2}$
- $c_{l-i_d,l} = c_{l+i_d,l} = -\frac{\Delta t}{Re}\frac{1}{\Delta y^2}$

όπου στο πίνακα $\mathcal{A}_u$ ο δείκτης i_d έχει την τιμή $i_d = i_{max} + 1$, ενώ στο πίνακα $\mathcal{A}_v$ ο δείκτης i_d έχει την τιμή $i_d = j_{max} + 1$.



Σχήμα 2: Η μορφή του πίνακα $\mathcal{A}_u$ για ένα πλέγμα 5×5.

Συνθήκη Ασυμπιεστότητας

Σε κάθε χρονικό βήμα η συνθήκη ασυμπιεστότητας επιβάλλεται με διόρθωση της πίεσης σε κάθε κελί $C_{i,j}$ ξεχωριστά, και εκ νέου υπολογισμό των ταχυτήτων u, v που προκύπτουν από το γραμμικό σύστημα.

Η νέα τιμή της πίεσης γίνεται:

$$p_{i,j}^{new} = p_{i,j}^{old} + (\Delta p)_{i,j} \tag{15}$$

και οι ανανεωμένες τιμές των u και v που ικανοποιούν την συνθήκη ασυμπιεστότητας, προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$u_{i\pm\frac{1}{2},j}^{new} = u_{i\pm\frac{1}{2},j}^{old} \pm \frac{\Delta t(\Delta p)_{i,j}}{\Delta x}, \quad v_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{new} = v_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{old} \pm \frac{\Delta t(\Delta p)_{i,j}}{\Delta y} \tag{16}$$

όπου $(\Delta p)_{i,j}$ το "κομμάτι" της πίεσης που υπολείπεται για την διόρθωση της τιμής της και δίνεται από την σχέση:

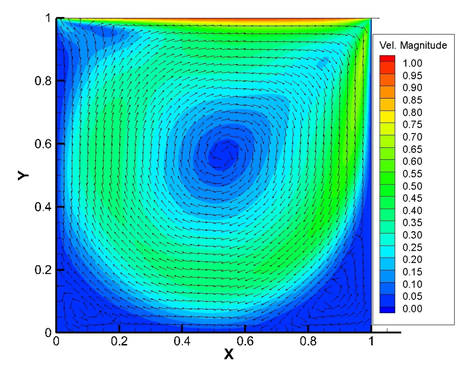
$$(\Delta p)_{i,j} = -\frac{D_{i,j}}{\frac{2\Delta t}{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}}} \tag{17}$$

όπου $D_{i,j}$ η διακριτή μορφή της εξίσωσης συνέχειας για το κελί $C_{i,j}$, δηλαδή:

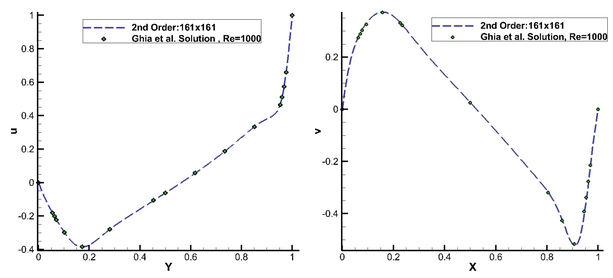
$$D_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{old} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{old}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{old} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{old}}{\Delta y} \tag{18}$$

Αποτελέσματα

Square Driven Cavity

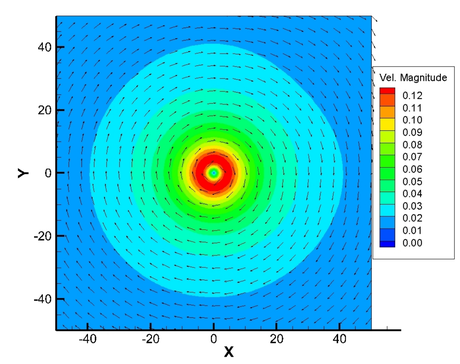


Σχήμα 3: Το πεδίο ταχυτήτων για πλέγμα 161×161 και $Re = 1000$. Τα βέλη υποδηλώνουν την κατεύθυνση κίνησης της ροής.

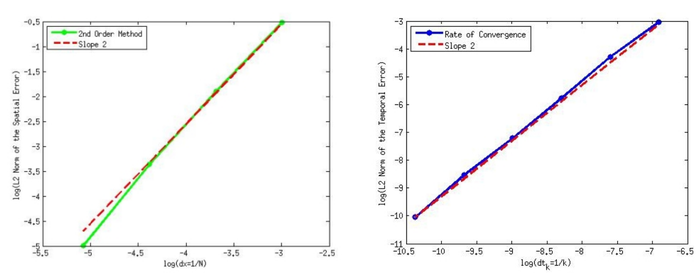


Σχήμα 4: Η κατανομή για την u συνιστώσα της ταχύτητας στην κεντρική κατακόρυφη γραμμή του πλέγματος 161×161 (αριστερά) και κατανομή για την v συνιστώσα της ταχύτητας καταμήκος της κεντρικής οριζόντιας γραμμής του πλέγματος (δεξιά), σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του Ghia για $Re = 1000$.

Oseen Vortex Decay



Σχήμα 5: Διάγραμμα ροής των ταχυτήτων. Γίνονται εμφανείς η διάφορες ζώνες όπου η ταχύτητα της ροής μειώνεται ξεκινώντας από το κέντρο της δύνης με φορά προς τα έξω. Η κατεύθυνση της ροής υποδηλώνεται από την φορά των βελών.



Σχήμα 6: Συσχέτιση του ρυθμού σύγκλισης των σφαλμάτων στην L^2 νόρμα με το slope 2. Στα αριστερά το χωρικό σφάλμα ενώ στα δεξιά το χρονικό σφάλμα της μεθόδου.

Συμπεράσματα

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας,

- εφαρμόστηκε μια πεπλεγμένη μέθοδος με σκοπό την επίλυση του προβλήματος ασυμπίεστης ροής για τις εξισώσεις των Navies-Stokes.
- εφαρμόστηκε μέθοδος ανανέωσης της πίεσης σε κάθε κελί του υπολογιστικού χωρίου με σκοπό την ικανοποίηση της συνθήκης ασυμπιεστότητας.
- πλεονέκτηματα ως προς ευστάθεια και ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου λόγω της μορφής του πίνακα.
- τα τελικά αποτελέσματα από τα δυο προβλήματα αναφοράς ήταν πολύ ακριβή σε σύγκριση με την βιβλιογραφία.