

ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΑΘΜΩΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΜΕ ΣΚΛΗΡΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΦΡΕΑΤΑ

Κακεπάκη Καλλιόπη
Α.Μ: 458



1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με το σενάριο του πληθωριστικού σύμπαντος το υλικό περιέχομενο στο πολύ πρώιμο σύμπαν μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα βαθμωτό πεδίο ϕ με ένα δυναμικό $V(\phi)$. Ο πληθωρισμός μπορεί να ερμηνευτεί φυσικά μέσω του τανυστή ενέργειας ορμής του βαθμωτού πεδίου που είναι ισοδύναμος με ένα τέλειο ρευστό με πυκνότητα ενέργειας ρ και πίεση p , οι οποίες δίνονται από τους τύπους:

$$\rho = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + V(\phi) \quad p = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \quad (1.1)$$

Ανάμεσα στους επιστήμονες που μελέτησαν το διαστελλόμενο σύμπαν είναι ο *Friedmann, Robertson, Walker* και *Lemaitre*, οι οποίοι ανεξάρτητα κατέληξαν σε ένα μοντέλο για να ποσοτικοποιήσουν ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Αυτό το μοντέλο καλείται *FLRW* Σύμπαν. Αυτό που το *FLRW* Σύμπαν πρότεινε είναι ένα διαστελλόμενο, ομογενές και ισοτροπικό χωροχρόνο. Αυτές θα είναι και δύο από τις υποθέσεις μας:

Ισοτροπία: Σε μεγάλες κλίμακες το σύμπαν φαίνεται το ίδιο προς όλες τις κατευθύνσεις. Δεν υπάρχει προτιμώμενη κατεύθυνση.

Ομοιογένεια: Σε μεγάλες κλίμακες το σύμπαν εμφανίζεται το ίδιο σε όλες τις τοποθεσίες. Δεν υπάρχει προτιμώμενη τοποθεσία.

Η *FLRW* μετρική είναι:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 + \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

Η συνολική συμπεριφορά των κοσμολογικών μοντέλων βαθμωτού πεδίου με πολύ σκληρά τοιχώματα δυναμικού διερευνάται μέσω του απλού παραδείγματος ενός εκθετικά απότομου δυναμικού. Διαπιστώνεται ότι οι λύσεις παρουσιάζουν μία μη τετριμμένη ταλαντωτική συμπεριφορά στην προσέγγιση μίας αρχικής χωροχρονικής ιδιομορφίας. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να ερμηνευτεί ως οφειλόμενη στην αδυναμία του βαθμωτού πεδίου να διασχίσει τα τοιχώματα του απότομου δυναμικού. Ο σκοπός του σεμιναρίου είναι να κατανοήσουμε τι συμβαίνει στο σύμπαν όταν το βαθμωτό πεδίο ϕ έχει ένα πολύ απότομο δυναμικό και συγκεκριμένα να αποδείξουμε ότι κάτι τέτοιο δεν αποτρέπει την δημιουργία κοσμικής μοναδικότητας και ορίζοντα σωματιδίων.

Υποθέτουμε ότι το σύμπαν είναι χωρικά επίπεδο, δηλαδή $\kappa = 0$, και κάνοντας αλλαγή συντεταγμένων η μετρική μας παίρνει την μορφή:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t) \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2$$

Δηλαδή ο μετρικός τανυστής παίρνει την μορφή:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \alpha^2(t), \alpha^2(t), \alpha^2(t)) \quad (1.2)$$

Εδώ $\alpha(t)$ καλείται συντελεστής κλίμακας και καθορίζει πως οι μεγάλης κλίμακας αποστάσεις στο διάστημα αλλάζουν με το χρόνο. Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες του συντελεστή κλίμακας είναι ότι εξαρτάται μόνο από τον χρόνο και καθώς γυρίζουμε πίσω στον χρόνο τελικά μηδενίζεται.

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις πεδίου *Einstein* :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

όπου $G_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής *Einstein*, $T_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής και Λ είναι η κοσμολογική σταθερά. Από τον ορισμό του τανυστή *Einstein* και παίρνοντας $8\pi G = 1$ και $\Lambda = 0$ έχουμε ότι η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής καμπυλότητας *Ricci* και R είναι η βαθμωτή καμπυλότητα. Για να προσδιορίσουμε τον τανυστή *Ricci* και το βαθμωτό *Ricci*, τα οποία είναι απαραίτητα για τον υπολογισμό των εξισώσεων πεδίου του *Einstein* για ένα ομογενές και ισοτροπικό σύμπαν, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τα σύμβολα *Christoffel* της μετρικής *FRLW* που δίνονται από:

$$\Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2} g^{lm} (\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij}) \quad \text{όπου } i, j, l = 0, 1, 2, 3$$

Ευτυχώς η *FRLW* μετρική είναι διαγώνια οπότε η πλειονότητα των συμβόλων

Christoffel θα είναι συμμετρικά ή μηδενικά. Αφού υπολογισθούν τα σύμβολα αυτά, μπορεί να προσδιοριστεί και ο τανυστής *Riemann*, ο οποίος δίνεται από:

$$R_{kji}^l = \partial_i \Gamma_{kj}^l - \partial_j \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{kj}^m \Gamma_{mi}^l - \Gamma_{ki}^m \Gamma_{mj}^l$$

Στην πραγματικότητα μας ενδιαφέρουν μόνο οι συνιστώσες του τελεστή *Riemann* που έχουν τον ίδιο κορυφαίο δείκτη με τον μέσο κάτω. Αυτές οι συνιστώσες είναι αρκετές για να υπολογίσουν τον τανυστή *Ricci*. Συγκεκριμένα, οι μόνες συνιστώσες *Ricci* που διαφέρουν από το μηδέν είναι:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} \quad R_{11} = R_{22} = R_{33} = \alpha \ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}^2$$

Τέλος παίρνουμε την βαθμωτή καμπυλότητα:

$$R = g^{ik} R_{ik} = 6 \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + 6 \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 \quad (1.4)$$

όπου g^{ik} είναι η αντίστροφη μετρική.

Η πρώτη από τις τρεις εξισώσεις εξέλιξης που διέπουν την αλληλεπίδραση ενός γενικού βαθμωτού πεδίου με την μετρική που χρησιμοποιούμε προκύπτει από την 00-συνιστώσα των εξισώσεων πεδίου του *Einstein*:

$$R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = T_{00} \Rightarrow -3 \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{2} \left[\frac{6}{\alpha^2} (a \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) \right] \cdot (-1) = \rho \Rightarrow 9 \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = 3\rho$$

Ορίζουμε $K = 3 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$, το οποίο ερμηνεύεται και ως ο ρυθμός διαστολής του χωρικού στοιχείου όγκου $v = \alpha^3$. Παρατηρούμε επίσης ότι αφού έχουμε ομογενές $\phi = \phi(t)$, οι τύποι 1.1 για την ενεργειακή πυκνότητα και την πίεση σε ένα τέλειο ρευστό γίνονται:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (1.5)$$

Οπότε αντικαθιστώντας τα παραπάνω προκύπτει ότι η πρώτη εξίσωση είναι:

$$K^2 = 3V(\phi) + \frac{3}{2} \dot{\phi}^2 \quad (1.6)$$

Γνωρίζουμε ότι ο ταυιστής ενέργειας ορμής του τέλειου ρευστού δίνεται από τον τύπο:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

όπου $u^\nu = (1, 0, 0, 0)$ είναι η τετραταχύτητα. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, το παραπάνω υπολογίζουμε την δεύτερη εξίσωση, η οποία προέρχεται από το ίχνος των εξισώσεων πεδίου του *Einstein* που δίνεται από:

$$R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \Rightarrow R_\mu^\mu - \frac{1}{2} R \delta_\mu^\mu = T_\mu^\mu \Rightarrow -R = -\rho + 3p$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.4) και (1.5) αλλά και εφαρμόζοντας την (1.6) παίρνουμε ότι η δεύτερη εξίσωση είναι :

$$\dot{K} = -\frac{3}{2} \dot{\phi}^2 \quad (1.7)$$

Η τρίτη εξίσωση προκύπτει αν παραγωγίσουμε την πρώτη εξίσωση και αντικαταστήσουμε την δεύτερη εξίσωση:

$$\ddot{\phi} = -K \dot{\phi} - V'(\phi) \quad (1.8)$$

Εναλλακτικά για να καταλήξουμε στην εξίσωση (1.8) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τοπική διατήρηση της ενεργειακής ορμής δηλαδή $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Άρα συνολικά έχουμε τις δύο εξισώσεις :

$$\ddot{\phi} = -K\dot{\phi} - V'(\phi) \quad \dot{K} = -\frac{3}{2}\dot{\phi}^2 \quad (1.9)$$

με την εξίσωση περιορισμού:

$$K^2 = 3V(\phi) + \frac{3}{2}\dot{\phi}^2 \quad (1.10)$$

Η γενική λύση για το άμαζο βαθμωτό πεδίο, δηλαδή θέτοντας στις παραπάνω εξισώσεις $V = 0$, είναι :

$$K = \frac{1}{t} \quad \phi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{c} \quad (1.11)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι κοντά στην μοναδικότητα η λύση του άμαζου βαθμωτού πεδίου αποτελεί μία καλή προσέγγιση. Δηλαδή χρησιμοποιούμε την (1.11) ως προσέγγιση της λύσης για αυθαίρετο V στο όριο $t \rightarrow 0$. Αντικαθιστώντας την (1.11) στην (1.10) καταλήγουμε:

$$\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} + V\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{c}\right) + h$$

όπου h υποδηλώνει όρους μεγαλύτερης τάξης ως προς t . Για να είναι αυτή η έκφραση συνεπής θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^2 V\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{c}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{\phi \rightarrow \pm \infty} e^{-\sqrt{6}|\phi|} V(\phi) = 0$$

Άρα αν το $V(\phi)$ αποκλίνει πιο αργά από το $e^{\sqrt{6}|\phi|}$ όταν $|\phi| \rightarrow \infty$ τότε κοντά στο *Big Bang* το V μπορεί να αγνοηθεί και άρα οι λύσεις κοντά στην μοναδικότητα προσεγγίζουν ασυμπτωτικά την λύση του άμαζου βαθμωτού πεδίου. Αν τώρα το δυναμικό είναι πιο απότομο από $\sqrt{6}|\phi|$ τότε αυτό δεν μπορεί να αγνοηθεί και επηρεάζει την εξέλιξη κοντά στην μοναδικότητα.

2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Το απλούστερο παράδειγμα ενός τέτοιου δυναμικού είναι εκείνο της μορφής:

$$V(\phi) = \alpha e^{\lambda\phi} + \beta e^{-\mu\phi}$$

όπου $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ είναι θετικές σταθερές. Εμείς θα περιοριστούμε στην περίπτωση που $\alpha = \beta = 1$ και $\lambda = \mu$ και άρα:

$$V(\phi) = e^{\lambda\phi} + e^{-\lambda\phi} \quad (2.1)$$

Η ανάλυση για το πιο γενικό δυναμικό είναι παρόμοια και τα συμπεράσματα ουσιαστικά ίδια. Αυξάνοντας το λ θα μπορέσουμε να διερευνήσουμε το πως αλλάζει η συμπεριφορά του συστήματος καθώς το δυναμικό γίνεται ολοένα και πιο απότομο.

Εισάγουμε τώρα ένα νέο σύστημα συντεταγμένων:

$$x = \frac{1}{K} \quad \text{και} \quad y = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\phi}}{K} \quad (2.2)$$

και μία νέα χρονική συντεταγμένη

$$\tau = \ln v(t) + \tau_0 \quad (2.3)$$

όπου $v = \alpha^3$ είναι το χωρικό στοιχείο όγκου και τ_0 είναι μία σταθερά. Η τ είναι καλά ορισμένη (αφού v αύξουσα). Επίσης παρατηρούμε ότι $v \rightarrow 0$ αν και μόνο αν $K \rightarrow \infty$ οπότε από τον ορισμό του τ προκύπτει ότι $K \rightarrow \infty$ καθώς $\tau \rightarrow -\infty$. Παραγωγίζοντας την (2.3) και χρησιμοποιώντας από τον ορισμό του K ότι $K = \frac{\dot{v}}{v}$ προκύπτει ότι $\frac{d}{dt} = K \frac{d}{d\tau}$.

Άρα έχουμε ότι:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{K} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{K} \right) = \frac{\dot{K}}{K^3} = xy^2$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{K} \frac{d}{d\tau} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\phi}}{K} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{K(-K\dot{\phi} - V'(\phi)) + \frac{3}{2}\dot{\phi}^3}{K^3} = -y - 3\alpha x^2(e^{\sqrt{6}\alpha\phi} - e^{-\sqrt{6}\alpha\phi}) + y^3$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{K} \dot{\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}} y$$

Σε όρους λοιπόν αυτών των συντεταγμένων, οι εξισώσεις (1.9) γράφονται πλέον ως ένα δυναμικό σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y^2 x \\ \frac{dy}{d\tau} = -y - 3\alpha x^2 (e^{\sqrt{6}\alpha\phi} - e^{-\sqrt{6}\alpha\phi}) + y^3 \\ \frac{d\phi}{d\tau} = \sqrt{\frac{2}{3}} y \end{cases} \quad (2.4)$$

όπου $\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{6}}$, ενώ η εξίσωση περιορισμού γίνεται:

$$y^2 + 3x^2(e^{\sqrt{6}\alpha\phi} + e^{-\sqrt{6}\alpha\phi}) = 1 \quad (2.5)$$

Για να απλοποιήσουμε και άλλο το σύστημα ορίζουμε τις μεταβλητές:

$$p = \sqrt{3}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\phi}x \quad \text{και} \quad q = y \quad (2.6)$$

και τότε η εξίσωση περιορισμού γράφεται ως

$$p^2 + q^2 = 1 - p^2 e^{2\sqrt{6}\alpha\phi} \quad (2.7)$$

ενώ το δυναμικό σύστημα (2.4) μετατρέπεται σε

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = -apq + pq^2 \\ \frac{dq}{d\tau} = q^3 + \alpha q^2 - q - \alpha + 2\alpha p^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Η διπλή αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων αποσκοπεί στην μετατροπή του αρχικού μας συστήματος σε ένα δισδιάστατο πλήρως αυτόνομο δυναμικό σύστημα με συμπαγή χώρο φάσης, καθώς παρατηρούμε ότι όλες οι φυσικές τροχιές βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου δεξιά από τον άξονα q . Δηλαδή ο χώρος φάσης είναι $\Omega = \{(p, q) : p^2 + q^2 < 1, p > 0\}$. Το σύνορο του χωρίου είναι προφανώς μία κλειστή καμπύλη που αποτελείται από την ένωση του λείου τόξου $\partial\Omega_1 = \{(p, q) : p^2 + q^2 = 1, p > 0\}$ και του ευθύγραμμου τμήματος $\partial\Omega_2 = \{(p, q) : p = 0, |q| \leq 1\}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το $\partial\Omega$ αντιστοιχεί στο άπειρο της διαστολής K . Πράγματι, ορίζουμε την συνάρτηση $H(p, q) = p^2(1 - p^2 - q^2)$, η οποία είναι θετική παντού στο Ω και μηδενίζεται ταυτοτικά στο $\partial\Omega$. Επίσης, από την εξίσωση περιορισμού και τον ορισμό του p προκύπτει ότι

$$H(p, q) = 9x^4 = 9 \cdot \frac{1}{K^4}$$

και άρα το ζητούμενο.

Παραγωγίζοντας τώρα την H ως προς τ έχουμε:

$$\frac{dH}{d\tau} = 36x^3 \frac{dx}{d\tau} = 36x^4 y^2 = 4Hq^2 \geq 0 \quad (2.9)$$

ατο εσωτερικό του Ω . Συγκεκριμένα, είναι θετική παντού στο εσωτερικό του Ω εκτός όπου $q = 0$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\frac{dH}{d\tau} = 0$ στο σύνορο όπου $H = 0$ και άρα το σύνορο είναι αναλλοίωτη πολλαπλότητα.

Επειδή ο χώρος φάσης Ω είναι συμπαγής, κάθε τροχιά πρέπει να έχει ένα οριακό σύνολο προς το παρελθόν. Όμως, δείξαμε ότι η H είναι γνησίως αύξουσα και άρα στο εσωτερικό του Ω , όπου $H > 0$, έχουμε ότι η H αυξάνει μονότονα για $\tau \rightarrow +\infty$ και άρα μειώνεται μονότονα για $\tau \rightarrow -\infty$. Άρα οποιοδήποτε οριακό σημείο πρέπει να έχει $\frac{dH}{d\tau} = 0$. Επομένως, όλα τα οριακά σύνολα πρέπει να είναι υποσύνολα είτε του συνόρου είτε του $q = 0$. Από το δυναμικό σύστημα, βέβαια, προκύπτει ότι το μοναδικό υποσύνολο του $q = 0$ είναι το σημείο ισορροπίας $p_d = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Το p_d , όμως, είναι τοπικό μέγιστο της H . Οπότε, αφού η H είναι αύξουσα, καμία τροχιά δεν μπορεί να πηγαίνει ασυμπτωτικά προς το p_d στο παρελθόν. Άρα τα οριακά σύνολα προς το παρελθόν βρίσκονται στο σύνορο. Με το ίδιο επιχείρημα καταλήγουμε ότι όλες οι τροχιές, με εξαίρεση αυτές που βρίσκονται στο σύνορο, πηγαίνουν ασυμπτωτικά στο p_d στο μέλλον.

Το p_d λέμε ότι αντιστοιχεί στον *de Sitter* χωροχρόνο με σταθερή διαστολή K . Πράγματι, από την εξίσωση περιορισμού έχουμε ότι στο p_d ισχύει $\phi = 0$ και άρα από τον ορισμό του p συνεπάγεται ότι $K = \sqrt{6}$. Να θυμίσουμε ότι ο *de Sitter* χωροχρόνος είναι μία λύση των πεδίων εξισώσεων *Einstein*, όπου το σύμπαν διαστέλλεται εκθετικά με σταθερό ρυθμό.

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι σχεδόν όλες οι λύσεις ξεκινούν κοντά στο $\partial\Omega$ και καθώς $\tau \rightarrow +\infty$ προσεγγίζουν το σημείο p_d . Θα αναλύσουμε, στην συνέχεια, την συμπεριφορά του συστήματος πάνω και κοντά στο σύνορο.

3 Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΡΟ

Λύνοντας τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{dp}{d\tau} = 0 \Rightarrow -\alpha pq + pq^2 = 0$$

$$\frac{dq}{d\tau} = 0 \Rightarrow q^3 + \alpha q^2 - q - \alpha + 2\alpha p^2 = 0$$

βλέπουμε ότι υπάρχουν το πολύ 4 σημεία ισορροπίας που βρίσκονται στο σύνορο $\partial\Omega$, τα $p_+ = (0, 1)$, $p_- = (0, -1)$, $p_1 = (\sqrt{1 - \alpha^2}, \alpha)$, $p_2 = (0, -\alpha)$. Παρατηρούμε ότι τα p_1 , p_2 υπάρχουν ως διακριτά σημεία ισορροπίας στο σύνορο μόνο όταν $\alpha < 1$. Άρα για $\alpha \geq 1$ τα p_+ , p_- είναι τα μόνα σημεία ισορροπίας. Για να ερευνήσουμε την συμπεριφορά κοντά στα p_+ , p_- γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις κοντά σε αυτά τα σημεία. Μετά από πράξεις, προκύπτει ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το σημείο p_+ είναι :

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = (1 - \alpha)p \\ \frac{dq}{d\tau} = 2(1 + \alpha)(q - 1) \end{cases}$$

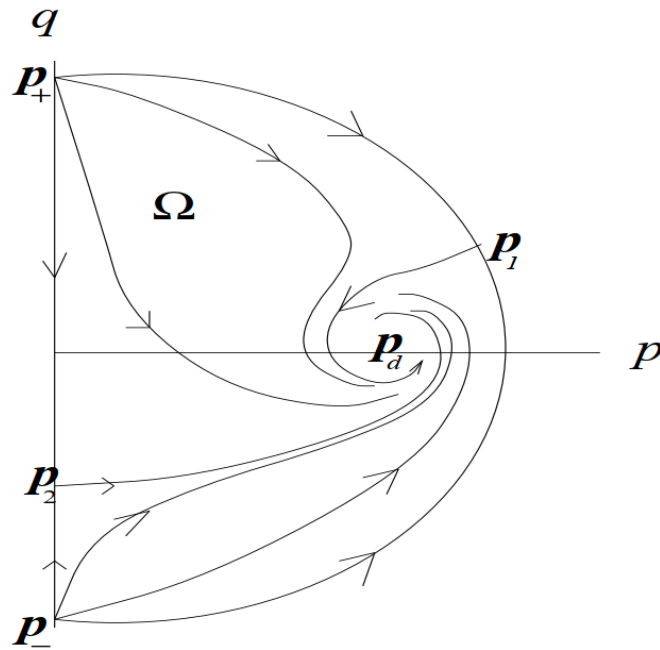
και οι λύσεις είναι αντίστοιχα $p = p_0 e^{(1-\alpha)\tau}$ $q = 1 - \delta_0 e^{2(1+\alpha)\tau}$ όπου p_0 , δ_0 είναι θετικές σταθερές. Παρόμοια το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το σημείο p_- είναι:

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = (1 + \alpha)p \\ \frac{dq}{d\tau} = 2(1 - \alpha)(q + 1) \end{cases}$$

και οι λύσεις είναι αντίστοιχα $p = p_0 e^{(1+\alpha)\tau}$ $q = -1 + \delta_0 e^{2(1-\alpha)\tau}$ όπου p_0 , δ_0 είναι θετικές σταθερές.

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $\alpha < 1$. Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι τα p_+ , p_- είναι υπερβολικά σημεία, αφού ο Ιακωβιανός πίνακας της γραμμικοποίησης στο κάθε σημείο ισορροπίας δεν έχει ιδιοτιμές μηδενικά πραγματικά μέρη. Συγκεκριμένα, επειδή για $\alpha < 1$ οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι θετικές πραγματικές, τα p_+ , p_- είναι ασταθείς κόμβοι. Από θεωρήμα *Hartman Grobman* συνεπάγεται ότι η τροχιακή δομή του δυναμικού συστήματος σε μία γειτονιά του υπερβολικού σημείου ισορροπίας είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την τροχιακή δομή του γραμμικοποιημένου δυναμικού συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία αντιστρέψιμη απεικόνιση που απεικονίζει το ένα διάγραμμα φάσης πάνω στο άλλο διατηρώντας τον προσανατολισμό των τροχιών. Άρα τα σημεία ισορροπίας p_+ , p_- είναι ασταθείς κόμβοι και για το

μη γραμμικό σύστημα όταν $\alpha < 1$. Αντίστοιχα γραμμικοποιώντας το σύστημα γύρω από τα p_1, p_2 θα δούμε ότι τα p_1, p_2 είναι σαγματικά σημεία, αφού ο αντίστοιχος Ιακωβιανός πίνακας στα σημεία αυτά έχει δύο πραγματικές ετερόσημες ιδιοτιμές. Οπότε υπάρχει μία ασταθής και μία ευσταθής πολλαπλότητα. Επίσης, έχουμε δείξει ότι όλες οι φυσικές λύσεις πλησιάζουν ασυμπτωτικά το σημείο p_d στο μέλλον. Να σημειώσουμε εδώ ότι το p_d είναι ευσταθής σπείρα αφού ο αντίστοιχος Ιακωβιανός πίνακας στο σημείο αυτό έχει ιδιοτιμές με πραγματικό αρνητικό μέρος.



Σχήμα 1:

Οπότε, με εξαίρεση τις δύο λύσεις που είναι παρελθοντικά ασυμπτωτικές προς τα p_1, p_2 , καθώς και την στάσιμη λύση p_d , όλες οι άλλες φυσικές λύσεις πρέπει να προσεγγίζουν ασυμπτωτικά είτε το p_+ είτε το p_- καθώς $\tau \rightarrow -\infty$. (Δες Σχήμα 1)

Λαμβάνοντας υπόψιν, από τις λύσεις του γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από τα σημεία p_+, p_- , ότι το $1 - q^2$ φθίνει εκθετικά στο μηδέν καθώς το $\tau \rightarrow -\infty$ τότε από την (2.9) συνεπάγεται ότι $H(\tau) = H_0 e^{4\tau}$. Με άλλα λόγια όσο πλησιάζουμε το σύνορο, οι λύσεις συμπεριφέρονται σαν να ικανοποιούν αυτή την εκθετική μορφή. Άρα:

$$H(\tau) = H_0 e^{4\tau} \Rightarrow 9x^4 = H_0 e^{4\tau} \Rightarrow x = x_0 e^\tau$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $\frac{d}{dt} = K \frac{d}{d\tau}$ παίρνουμε μία πρώτη τάξης έκφραση για το t :

$$t = x_0 e^\tau$$

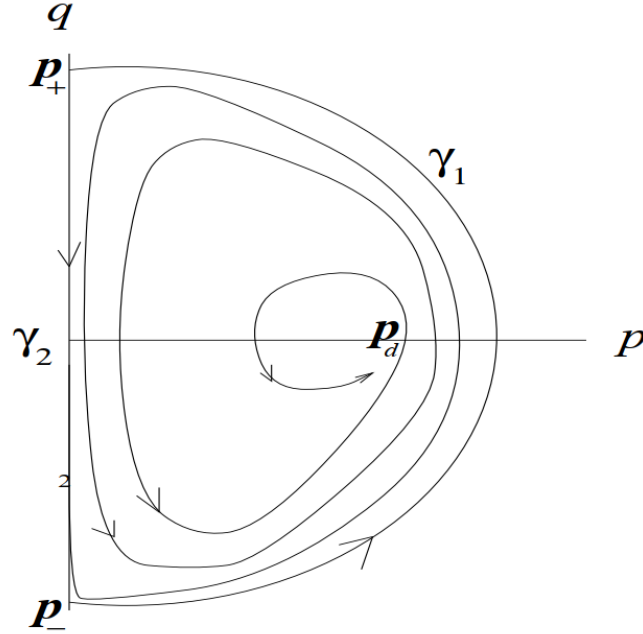
Παρατηρούμε ότι $t \rightarrow 0$ καθώς $\tau \rightarrow -\infty$, γεγονός που δείχνει ότι τα p_+ , p_- αντιστοιχούν σε ιδιομορφίες του χωροχρόνου. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των x και q προκύπτει ότι η ασυμπτωτική λύση για το K και το ϕ στην γειτονιά του $t = 0$ είναι:

$$x = \frac{1}{K} \quad \text{και} \quad \dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \phi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{c}$$

Αυτό είναι προφανώς η γενική λύση για το άμαζο βαθμωτό πεδίο. Οπότε δείξαμε ότι όταν $\alpha < 1$, δηλαδή όταν $\lambda < \sqrt{6}$, το δυναμικό V δεν είναι σημαντικό κοντά στην ιδιομορφία, το οποίο είναι ακριβώς αυτό που περιμέναμε από την ανάλυση που είχαμε κάνει στην προηγούμενη ενότητα για δυναμικά που τείνουν στο άπειρο πιο αργά από $e^{\sqrt{6}\phi}$.

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε τι συμβαίνει όταν $\alpha \geq 1$. Όπως δείξαμε και στην αρχή, σε αυτή την περίπτωση το δυναμικό γίνεται αρκετά απότομο για να πούμε ότι η λύση με $V = 0$ είναι συνεπής ως ασυμπτωτική λύση. Εμείς για λόγους ευκολίας θα υποθέσουμε ότι $\alpha > 1$ αλλά στην ουσία για $\alpha = 1$ τα χαρακτηριστικά των λύσεων είναι ουσιαστικά τα ίδια. Το απότομο του δυναμικού αλλάζει ριζικά την συμπεριφορά του συστήματος κοντά στην ιδιομορφία.

Τα μόνα σημεία ισορροπίας που διαθέτει το σύστημα για $\alpha > 1$ είναι τα p_+ , p_- και p_d . Όμως, στην συγκεκριμένη περίπτωση τα p_+ , p_- είναι σαγματικά σημεία γιατί αν πάρουμε τον αντίστοιχο Ιακωβιανό πίνακα στα σημεία αυτά θα έχει δύο ετερόσημες πραγματικές ιδιοτιμές. Επομένως, η μοναδική λύση που είναι παρελθοντικά ασυμπτωτική προς το p_- είναι η μη φυσική τροχιά γ_1 , η οποία εκκινεί από το p_- όταν $\tau = -\infty$ και συνεχίζει αριστερόστροφα κατά μήκος του $\partial\Omega_1$ φτάνοντας στο p_+ όταν $\tau = +\infty$. Αντίστοιχα η μοναδική λύση που είναι παρελθοντικά ασυμπτωτική προς το p_+ είναι η μη φυσική τροχιά γ_2 , η οποία εκκινεί από το p_+ όταν $\tau = -\infty$ και συνεχίζει κατά μήκος του $\partial\Omega_2$ φτάνοντας στο p_- όταν $\tau = +\infty$. Η γ_1 και η γ_2 μαζί σχηματίζουν μία κλειστή ετεροκλινική τροχιά. (Δες Σχήμα 2)



Σχήμα 2:

Να θυμίσουμε ότι είχαμε ορίσει την συνάρτηση $H(p, q) = p^2(1 - p^2 - q^2)$ και είχαμε δείξει ότι $\frac{dH}{d\tau} = 4Hq^2 \geq 0$ και άρα η H είναι αύξουσα προς το μέλλον και άρα η H φθίνει προς το παρελθόν. Επειδή $H > 0$ στο εσωτερικό του Ω και μηδενίζεται στο σύνορο έχουμε ότι $H(\tau) \rightarrow 0$ καθώς $\tau \rightarrow -\infty$ και αυτό συνεπάγεται ότι $K \rightarrow \infty$ καθώς $\tau \rightarrow -\infty$. Επομένως, οι τροχιές πλησιάζουν σπειροειδώς το σύνορο όταν πηγαίνουμε προς το παρελθόν. Από την εξίσωση περιορισμού προκύπτουν τα εξής:

- Το $\partial\Omega_1$ αντιστοιχεί στο $\phi = -\infty$.
- Το $\partial\Omega_2$ αντιστοιχεί στο $\phi = +\infty$ λόγω συμμετρίας.

Οπότε, αφού δείξαμε ότι το σύστημα κάνει άπειρες περιστροφές γύρω από το σύνορο καθώς $\tau \rightarrow -\infty$ καταλήγουμε ότι το ϕ θα κάνει άπειρες ταλαντώσεις γύρω από το 0 με το πλάτος της ταλάντωσης να αυξάνεται αποκλίνοντας ασυμπτωτικά στο άπειρο.

- Όταν $q \approx 0 \Rightarrow y \approx 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0$ και άρα το πεδίο βρίσκεται στην κορυφή του δυναμικού όπου $V(\phi) \gg \dot{\phi} \Rightarrow \rho = -p$, η οποία είναι η εξίσωση κατάστασης *De Sitter* με αρνητική πίεση και εκθετική διαστολή.

Αυτή η ταχεία διαστολή σχετίζεται με το γεγονός ότι η βαρύτητα είναι απωστική παρουσία μεγάλων αρνητικών πιέσεων.

- Όταν $|q| \approx 1 \Rightarrow \dot{\phi}^2 \gg V(\phi) \Rightarrow \rho = p$ και άρα η ενέργεια του πεδίου συμπεριφέρεται σαν άκαμπτο ρευστό.

Επομένως, το σύμπαν κοντά στην μοναδικότητα δεν έχει σταθερή συμπεριφορά. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του χωροχρόνου μπορεί να χαρακτηριστεί από μία άπειρη ακολουθία άκαμπτων φάσεων διακοπτόμενων από φάσεις τύπου *De Sitter*.

Άρα συνολικά δείξαμε τα παρακάτω:

- Για $\alpha < 1$ το δυναμικό κοντά στην μοναδικότητα δεν επηρεάζει ουσιαστικά την εξέλιξη και η λύση για το άμαζο βαθμωτό πεδίο αποτελεί μία καλή ασυμπτωτική προσέγγιση. Όλες σχεδόν οι φυσικές λύσεις προσεγγίζουν μονότονα στο παρελθόν ένα από τα σημεία p_+ , p_- ενώ στο μέλλον όλες καταλήγουν στο p_d που αντιστοιχεί στον *De Sitter* χωροχρόνο.

- Για $\alpha \geq 1$ το δυναμικό είναι πολύ απότομο οπότε πλέον η λύση για το άμαζο βαθμωτό πεδίο δεν είναι μία καλή ασυμπτωτική προσέγγιση προς το παρελθόν. Για $\tau \rightarrow -\infty$ έχουμε ότι οι τροχιές πλησιάζουν σπειροειδώς τον ετεροκλινικό κύκλο ενώ εμφανίζεται άπειρος αριθμός ταλαντώσεων γύρω από το μηδέν κοντά στην ιδιομορφία. Στο μέλλον πάλι όλες οι τροχιές καταλήγουν στο p_d που αντιστοιχεί στον *De Sitter* χωροχρόνο.

4 ΥΠΑΡΞΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΝΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Εφόσον συμβαίνει ένας άπειρος αριθμός ταλαντώσεων του βαθμωτού πεδίου για $\alpha > 1$ θα μπορούσε εύκολα να αναμένεται ότι και ένα άπειρο διάστημα ιδιοχρόνου πρέπει, επίσης, να μεσολαβεί, αφού οι ταλαντώσεις θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως ένα φυσικό ρολόι, το οποίο θα μετρούσε ένα άπειρο χρονικό διάστημα στο παρελθόν οποιουδήποτε χωροχρονικού σημείου. Αν αυτό ίσχυε, τότε ο χωροχρόνος θα ήταν μη ιδιομορφικός για όλες τις φυσικές λύσεις. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι οι ταλαντώσεις συσσωρεύονται η μία πάνω στην άλλη και πράγματι επιτυγχάνεται μία χωροχρονική ιδιομορφία έπειτα από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να εκτιμήσουμε τον ιδιοχρόνο που μεσολαβεί στο παρελθόν κάποιου αυθαίρετου αρχικού σημείου p_0 στην τροχιά $\psi_{p_0}(\tau)$. Εφόσον όλες οι τροχιές είναι ασυμπτωτικά εφαπτόμενες στο $\partial\Omega$, θα είναι επαρκές να περιορίσουμε την προσοχή μας σε αρχικά σημεία που βρίσκονται στο σύνολο $\Sigma_0 = \{(p, q) : q = 1 - \epsilon, 0 < p \leq \epsilon\}$ όπου $\epsilon > 0$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρό.

Πριν αποδείξουμε τα δύο βασικά θεωρήματα της ενότητας θα ήταν βολικό να αποδείξουμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 4.0.1. Για όλα τα $0 < n < 1$ υπάρχουν θετικοί αριθμοί ϵ και $\tilde{p}_m$ τέτοιοι ώστε αν $p_0 = (\tilde{p}_0, 1 - \epsilon) \in \Sigma_0$ και $\tilde{p}_0 < \tilde{p}_m$ τότε

$$H(\psi_{p_0}(\tau)) < H_0 e^{4n\tau}$$

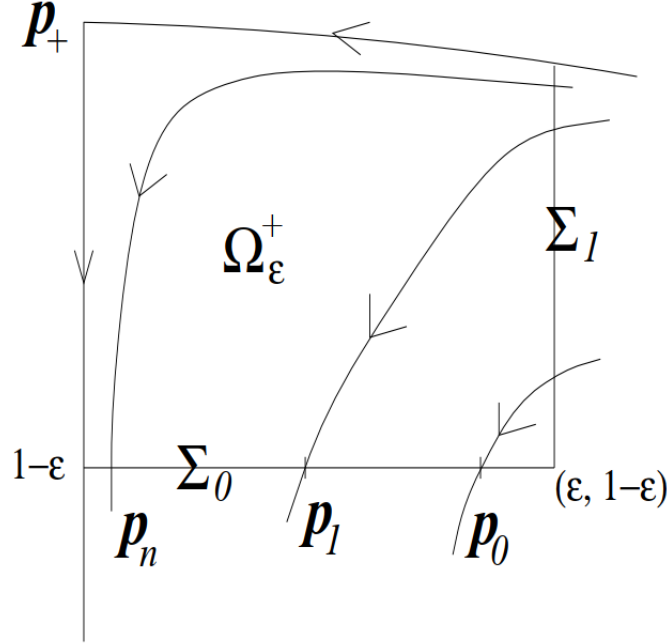
στο παρελθόν του p_0 , όπου $\psi_{p_0}(\tau)$ είναι η μοναδική τροχιά του δυναμικού συστήματος που διέρχεται από το σημείο p_0 με $\psi_{p_0}(0) = p_0$

Το Λήμμα στην ουσία δίνει ένα άνω φράγμα για την H , το οποίο σημαίνει ότι καθώς οι τροχιές κάνουν όλο και πιο γρήγορες ταλαντώσεις γύρω από το $\partial\Omega$, η απόστασή τους από το σύνορο (που στην ουσία αυτό αντιπροσωπεύει η H) συρρικνώνεται εκθετικά. Δηλαδή, οι ταλαντώσεις συσσωρεύονται η μία πάνω στην άλλη.

Απόδειξη. Από προηγούμενη ενότητα είχαμε την σχέση $\frac{dH}{d\tau} = 4Hq^2(\tau)$. Ολοκληρώνοντας προς τα πίσω στον χρόνο από $\tau = 0$ έως κάποια προγενέστερη στιγμή τ_f λαμβάνουμε:

$$H(\tau_f) = H_0 e^{-4 \int_0^{\tau_f} q^2(\tau) d\tau} \quad (4.1)$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι το H μειώνεται όσο πηγαίνουμε προς το παρελθόν αν το $q \neq 0$. Έστω $\Sigma_1 = \{(p, q) \in \Omega : p = \epsilon, 1 - q \leq \epsilon\}$.



Σχήμα 3:

Το $\Sigma_1 + \Sigma_0$ περικλείει ένα κουτί Ω_ϵ^+ , εμβαδού περίπου ϵ^2 μέσα στο Ω γύρω από το p_+ . (Δες Σχήμα 3) Αντίστοιχα, αν ορίσουμε τα σύνολα $\Sigma_2 = \{(p, q) \in \Omega : p = \epsilon, 1 + q \leq \epsilon\}$ και $\Sigma_3 = \{(p, q) \in \Omega : q = 1 + \epsilon, 0 < p \leq \epsilon\}$, τότε κατασκευάζεται ένα άλλο κουτί γύρω από το p_- . Έστω το χρονικό διάστημα $I := [\tau_f, 0]$. Τότε για μία δεδομένη τροχιά ψ_{p_0} μπορούμε να γράψουμε $I = I_c \cup I_b$, όπου $I_c = \{\tau \in I : \psi_{p_0}(\tau) \in \Omega_\epsilon^\pm\}$ και $I_b = \{\tau \in I : \psi_{p_0}(\tau) \notin \Omega_\epsilon^\pm\}$. Όπότε, θα έχουμε:

$$\int_{\tau_f}^0 q^2 d\tau = \int_{I_c} q^2 d\tau + \int_{I_b} q^2 d\tau > \int_{I_c} q^2 d\tau = \int_{I_c} (1 - O(\epsilon)) d\tau$$

Σταθεροποιούμε το n και έστω m τέτοιο ώστε $n < m < 1$. Τότε για ϵ επαρκώς μικρό έχουμε:

$$\int_{\tau_f}^0 q^2 d\tau > m \int_{I_c} d\tau$$

Θα δείξουμε ότι επιλέγοντας το $\tilde{p}_0$ επαρκώς μικρό, ο λόγος $\frac{\int_{I_c} d\tau}{\int_I d\tau}$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα κοντά στο 1. Από την πρώτη εξίσωση του δυναμικού συστήματος παίρνουμε ότι:

$$\frac{d \ln p}{d\tau} = -\alpha q + q^2 < 1 + \alpha \text{ αφού } |q| < 1$$

Οπότε αν $\tau_2 < \tau_1$ έχουμε:

$$\frac{\ln p_1}{\ln p_2} < (1 + \alpha)(\tau_1 - \tau_2) \quad \text{όπου } p_1 := p(\tau_1), p_2 := p(\tau_2)$$

Αφού ο παραμετρικός χρόνος $\Delta\tau$ που χρειάζεται ώστε ένα σημείο $p_0 = (\tilde{p}_0, 1 - \epsilon) \in \Sigma_0$ να διατρέξει το Ω_ϵ^+ και να φτάσει στο Σ_1 πρέπει να ικανοποιεί

$$|\Delta\tau| > \frac{1}{1 + \alpha} \ln \frac{\epsilon}{\tilde{p}_0}$$

Το απόλυτο εδώ είναι απαραίτητο γιατί ιχνηλατούμε την τροχιά προς τα πίσω στον χρόνο, άρα το $\Delta\tau$ θα είναι αρνητικό.

Εφόσον ψ_{p_0} είναι παρελθοντικά ασυμπτωτική προς τον οριακό κύκλο γ_l , η τομή της παρελθοντικής τροχιάς $O_{p_0}^-$ με την ευθεία $q = 1 - \epsilon$ πρέπει να περιέχει ένα άπειρο αριθμό σημείων επιπλέον του p_0 . Αν p_1 είναι ένα τέτοιο σημείο δηλαδή $p_1 = (\tilde{p}_1, 1 - \epsilon)$ τότε χρησιμοποιώντας ότι η $H = p^2(1 - p^2 - q^2)$ είναι αύξουσα και βάζοντας $q = 1 - \epsilon$ θα έχουμε ότι $\tilde{p}_1 < \tilde{p}_0$.

Δηλαδή, με άλλα λόγια η τροχιά ψ_{p_0} διέρχεται μέσα από το κουτί Ω_ϵ^+ σε κάθε διαδοχικό κύκλο και το χρονικό διάστημα $\Delta\tau_n^+$ για να διατρέξει το Ω_ϵ^+ στον n -οστό κύκλο ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|\Delta\tau_n^+| > \frac{1}{\alpha + 1} \ln \left(\frac{\epsilon}{\tilde{p}_n} \right) > \frac{1}{\alpha + 1} \ln \left(\frac{\epsilon}{\tilde{p}_0} \right)$$

Ομοίως, ορίζοντας $\Delta\tau_n^-$ ως τον χρόνο που απαιτείται ώστε η ψ_{p_0} να διατρέξει το κουτί Ω_ϵ^- στον n -οστό κύκλο θα ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) < (1 + \alpha)(\tau_1 - \tau_2) \Rightarrow |\Delta\tau_n^-| > \frac{1}{\alpha + 1} \ln \left(\frac{\epsilon}{\hat{p}_n} \right)$$

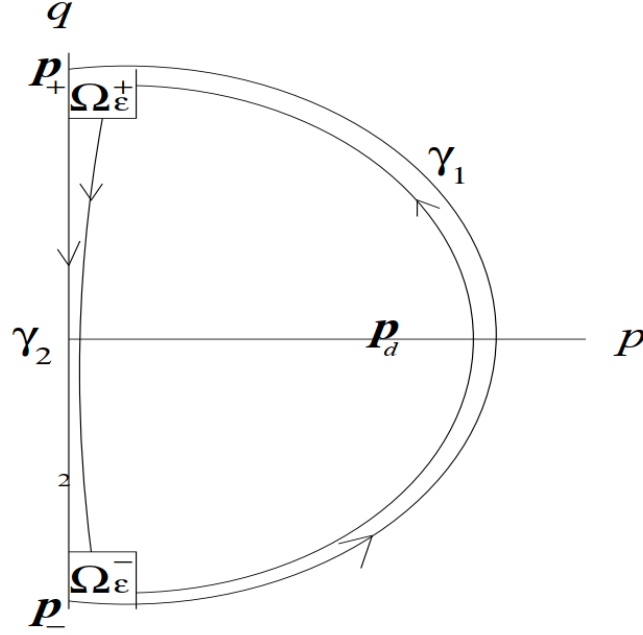
όπου $\hat{p}_n$ είναι η p -συντεταγμένη της τομής της ψ_{p_0} με το Σ_3 στον n -οστό κύκλο. Με τον όρο n -οστό κύκλο εννοούμε έναν πλήρη κύκλο από το σημείο $(\hat{p}_{n-1}, 1 - \epsilon) \in \Sigma_0$ στο $(\hat{p}_n, 1 - \epsilon) \in \Sigma_0$.

Από τον ορισμό της H και επειδή ο όρος q^2 παίρνει την ίδια τιμή στο Σ_0 και Σ_3 έχουμε ότι για κάθε σημείο σε αυτά τα σύνολα θα ισχύει:

$$H^2 = (2\epsilon - \epsilon^2)p^2 + O(\epsilon p^4)$$

και αφού H είναι μονότονη τότε για ϵ επαρκώς μικρό θα έχουμε $\hat{p}_n < \tilde{p}_0$. Οπότε

$$|\Delta\tau_n^-| > \frac{1}{\alpha + 1} \ln \left(\frac{\epsilon}{\tilde{p}_0} \right)$$



Σχήμα 4:

Έστω, τώρα, Δt να είναι ο παραμετρικός χρόνος που χρειάζεται ώστε ένα σημείο στο Σ_1 να φτάσει στο Σ_2 κοντά στο $\partial\Omega_2$. Αυτός είναι ο χρόνος που απαιτείται για να πάμε από το Ω_ϵ^+ στο Ω_ϵ^- με την έννοια του αντίστροφου χρόνου.

Λόγω συνέχειας, το Δt προσεγγίζει το αρνητικό χρονικό διάστημα που η ασυμπτωτική λύση γ_1 χρειάζεται για να απεικονίσει το σημείο $(\epsilon, \sqrt{1-\epsilon^2}) \in \Sigma_1$ στο σημείο $(\epsilon, -\sqrt{1-\epsilon^2}) \in \Sigma_2$. (Δες Σχήμα 4) Το διάστημα αυτό, όμως, είναι πεπερασμένο. Επομένως το χρονικό διάστημα για να πάει κανείς από το Σ_1 στο Σ_2 πρέπει να προσεγγίζει ένα πεπερασμένο αρνητικό χρονικό όριο. Το απόλυτο του, λοιπόν, πρέπει να διαθέτει ένα πεπερασμένο άνω φράγμα τ_1 . Έστω, δηλαδή, $\Delta\tau_n^1$ ο χρόνος που απαιτείται ώστε η ψ_{p_0} να πάει από το Σ_1 στο Σ_2 στον n -οστό κύκλο, τότε θα ισχύει για κάποιο πεπερασμένο τ_1 :

$$|\Delta\tau_n^1| < \tau_1$$

Ομοίως, αν $\Delta\tau_n^2$ ο χρόνος που απαιτείται ώστε η ψ_{p_0} να κινηθεί προς τα πίσω στον χρόνο από το Σ_3 στο Σ_0 στον n -οστό κύκλο, τότε θα ισχύει για κάποιο πεπερασμένο τ_2 :

$$|\Delta\tau_n^2| < \tau_2$$

Εφόσον η ψ_{p_0} προσπίπτει στο Σ_0 και επομένως διέρχεται από το Ω_ϵ^+ έπεται

από τις προηγούμενες ανισότητες ότι

$$\frac{\int_{I_c} d\tau}{\int_{I_b} d\tau} > \frac{1}{\tau_\epsilon(\alpha + 1)} \ln \left(\frac{\epsilon}{\tilde{p}_0} \right) \text{ όπου } \tau_\epsilon = \max(\tau_1, \tau_2)$$

Επιλέγουμε $\tilde{p}_0 = \exp \left[\frac{-\tau_\epsilon(\alpha+1)}{(\frac{m}{n}-1)} \right]$ και τότε

$$\begin{aligned} \int_I d\tau &= \int_{I_c} d\tau \left[1 + \frac{\int_{I_b} d\tau}{\int_{I_c} d\tau} \right] < \int_{I_c} d\tau \left[1 + \frac{\tau_\epsilon(\alpha + 1)}{\ln \left(\frac{\epsilon}{\tilde{p}_0} \right)} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_I d\tau < \frac{m}{n} \int_{I_c} d\tau \Rightarrow -\tau_f < \frac{m}{n} \int_{I_c} d\tau \end{aligned}$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$H(\tau_f) = H_0 e^{(-4 \int_{\tau_f}^0 q^2 d\tau)} < H_0 e^{(-4m \int_{I_c} d\tau)} \Rightarrow H(\tau_f) < H_0 e^{4n\tau_f}$$

□

Τώρα πια πολύ εύκολα αποδεικνύουμε τα παρακάτω θεωρήματα:

Ορισμός 4.0.2. Μία κοσμολογία βαθμωτού πεδίου είναι μη τετριμμένη αν υπάρχει κάποιο χωροχρονικό σημείο για το οποίο το $\dot{\phi}$ να είναι μη μηδενικό.

Θεώρημα 4.0.3. Αν $(g_{\mu\nu}, \phi)$ είναι μία μη τετριμμένη κοσμολογία βαθμωτού πεδίου με δυναμικό $V(\phi) = e^{\lambda\phi} + e^{-\lambda\phi}$ και αν το $g_{\mu\nu}$ είναι χωρικά επίπεδο και ισότροπο, τότε το $g_{\mu\nu}$ διαθέτει μία αρχική χωροχρονική ιδιομορφία.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα υπάρχουν θετικοί αριθμοί ϵ και $\tilde{p}_m$ τέτοιοι ώστε όλες οι τροχιές του συστήματος που προσπίπτουν στο Σ_0 με $\tilde{p}_0 < \tilde{p}_m$ να ικανοποιούν $H(\tau) < H_0 e^{4n\tau} \forall \tau < 0$. Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι αυτές οι τροχιές φτάνουν στο σύνορο σε πεπερασμένο ιδιοχρόνο. Ο ιδιοχρόνος που απαιτείται για να φτάσουν στο σύνορο δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta t = \int_0^\infty dt = \int_{-\infty}^0 x d\tau$$

Από την σχέση

$$H = 9x^4 \Rightarrow x^4 < \frac{H_0}{9} e^{4n\tau} \Rightarrow x < x_0 e^{n\tau} \text{ όπου } x_0 = \left(\frac{H_0}{9} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Επιλέγουμε $n = \frac{1}{2}$ οπότε $x < x_0 e^{\frac{\tau}{2}}$. Άρα τελικά προκύπτει:

$$\Delta t = \int_{-\infty}^0 x d\tau < x_0 \int_{-\infty}^0 e^{\frac{\tau}{2}} d\tau = 2x_0$$

το οποίο είναι προφανώς πεπερασμένο. $\square$

Θεώρημα 4.0.4. Αν $(g_{\mu\nu}, \phi)$ είναι μία μη τετριμμένη κοσμολογία βαθμωτού πεδίου με δυναμικό $V(\phi) = e^{\lambda\phi} + e^{-\lambda\phi}$ και αν το $g_{\mu\nu}$ είναι χωρικά επίπεδο και ισότροπο, τότε ορίζοντες σωματιδίων υπάρχουν για όλους τους ισότροπους παρατηρητές.

Απόδειξη. Ένας ορίζοντας σωματιδίων υπάρχει για έναν ισότροπο παρατηρητή την χρονική στιγμή t αν το ολοκλήρωμα $l = \int_0^t \frac{1}{\alpha} dt$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Από τον ορισμό του τ και την σχέση $dt = x d\tau$ έχουμε:

$$l = \int_0^t \frac{1}{\alpha} dt = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{\tau}{3}} e^{\frac{t_0}{3}} x(\tau) d\tau$$

Από το Λήμμα έχουμε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί ϵ και $\tilde{p}_m$ τέτοιοι ώστε όλες οι τροχιές του συστήματος που προσπίπτουν στο Σ_0 με $\tilde{p}_0 < \tilde{p}_m$ να ικανοποιούν $H(\tau) < H_0 e^{\frac{\tau}{2}} \forall \tau < 0$. Αν το l είναι πεπερασμένο στην στιγμή $\tau = 0$, τότε θα είναι πεπερασμένο για όλα τα τ . Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι οι τροχιές για τις οποίες ισχύει $H(\tau) < H_0 e^{\frac{\tau}{2}}$ διαθέτουν ορίζοντα σωματιδίων στην στιγμή $\tau = 0$.

Όμως,

$$H = 9x^4 \Rightarrow x = \left(\frac{H}{9}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x(\tau) < x_0 e^{\frac{\tau}{2}} \text{ όπου } x_0 = \left(\frac{H_0}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$l < e^{\frac{\tau_0}{3}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\tau}{3}} \cdot x_0 \cdot e^{\frac{\tau}{2}} d\tau = 6e^{\frac{\tau_0}{3}} \cdot x_0$$

το οποίο είναι προφανώς πεπερασμένο. $\square$

Να σημειώσουμε, επίσης, ότι $l \rightarrow 0$ καθώς $x_0 \rightarrow 0$ γεγονός που δείχνει ότι το μήκος του ορίζοντα συρρικνώνεται στο μηδέν καθώς το $t \rightarrow 0$.

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το παράδειγμα που μελετήσαμε δείχνει ότι πολύ απότομα δυναμικά μπορούν να οδηγήσουν σε μη τετριμμένη ασυμπτωτική συμπεριφορά ακόμα και σε πολύ απλά κοσμολογικά μοντέλα. Δηλαδή, δεν έχουμε την αναμενόμενη συμπεριφορά κοντά στην ιδιομορφία και το σύστημα δεν μοιάζει με τα κλασικά *FLRW* μοντέλα.

Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που βρέθηκαν (ταλαντώσεις, ιδιομορφία, οριζόντες σωματιδίων) δεν είναι ειδικά μόνο για το εκθετικής μορφής δυναμικό. Ακόμα και πιο απότομα από εκθετικά δυναμικά δείχνουν αυτή την συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, έρευνες για το πιο απότομο δυναμικό $V(\phi) = e^{\lambda\phi^2}$ και για το $V(\phi) = \frac{1}{(\lambda-\phi^2)}$ στο χωρίο $\phi^2 < \lambda$ δείχνουν ότι η συμπεριφορά του συστήματος δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες διαφορές.

Μέχρι τώρα δουλεύαμε σε *FLRW* χωροχρόνους, δηλαδή ομογενείς και ισοτρόπους. Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί η δυναμική των μοντέλων με εκθετικά απότομα δυναμικά σε λίγο πιο σύνθετους χωροχρόνους όπως ο χωροχρόνος *Bianchi* τύπου *IX*. Σε αυτή την περίπτωση ενδεχομένως να οδηγηθούμε σε αποφυγή οριζόντων σωματιδίων αλλά αυτό να τονίσουμε ότι αποτελεί προοπτική για μελλοντική μελέτη και όχι κάποιο αποδεδειγμένο αποτέλεσμα.

Αναφορές

- [1] *Foster, S. (1998) Scalar Field Cosmological Models With Hard Potential Walls. Department of Physics and Mathematical Physics The University of Adelaide, Adelaide, Australia 5005.*
- [2] *A.H. Guth. Phys. Rev. D 23 347, 1981.*
- [3] *A.D. Linde. Phys. Lett. 129b 177, 1983.*
- [4] *S.K. Blau and A.H. Guth. In 300 Years of Gravitation, Ed. S.J. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.*
- [5] *S.J. Hawking and G.F.R. Ellis. The Large Scale Structure of Space–time. Cambridge University Press, New York, 1973.*
- [6] *M.S. Madsen. Gen. Rel. Grav. 18 879, 1986.*
- [7] *F. Lucchin and S. Matarrese. Phys. Rev. D 32 1316, 1985.*
- [8] *S. Foster. Preprint gr–qc/9806098, submitted to Class. Quant. Grav.*
- [9] *J. Guckenheimer and P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer–Verlag, New York, 1983.*