

# Σημειώσεις για τον Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (DFT) και τον Ταχύ Μετασχηματισμό Fourier (FFT)

Κυριάκος Καλλέργης

January 2026

«Η ασυνειδησία της αδυναμίας μας συνιστά τη  
δύναμη μας»

---

*Fernando Pessoa*

# Πρόλογος

Η μελέτη της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος βασίζεται σε δύο πυλώνες: στη μαθηματική κομψότητα του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier (DFT) και στην υπολογιστική αποδοτικότητα του Ταχύ Μετασχηματισμού Fourier (FFT). Αυτές οι σημειώσεις φιλοδοξούν να παρουσιάσουν τα δύο αυτά αντικείμενα με ενιαίο και συνεκτικό τρόπο. Η δομή των σημειώσεων αναπτύσσεται σε τρία μέρη. Στο **Κεφάλαιο 0**, τίθενται τα απαραίτητα εργαλεία Γραμμικής Άλγεβρας που απαιτούνται στην απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier: ότι οι γραμμικοί, μεταθετικά αναλλοίωτοι (Translation-Invariant) γραμμικοί μετασχηματισμοί διαγωνοποιούνται από τη βάση Fourier. Λόγω του εισαγωγικού χαρακτήρα αυτού του κεφαλαίου, η ανάγνωσή του δεν είναι υποχρεωτική για τη συνέχεια. Ο αναγνώστης μπορεί να προχωρήσει απευθείας στο Κεφάλαιο 1 και να ανατρέχει στο Κεφάλαιο 0 συμβουλευτικά, όποτε προκύπτει ανάγκη χρήσης των εργαλείων της Γραμμικής Άλγεβρας. Στο **Κεφάλαιο 1**, εισάγονται οι τυπικοί ορισμοί και οι βασικές ιδιότητες του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier. Μέσα από τη μαθηματική ανάλυση, οδηγούμαστε στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος που αναφέρθηκε, αποκαλύπτοντας τη φυσική σύνδεση μεταξύ των γραμμικών συστημάτων και της ανάλυσης συχνοτήτων. Τέλος, στο **Κεφάλαιο 2** περιγράφεται ο Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier. Εδώ αναλύεται ο αλγόριθμος σε δύο περιπτώσεις και εξηγείται γιατί μειώνεται δραστικά το υπολογιστικό κόστος για τον υπολογισμό του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier. Οι σημειώσεις αυτές έχουν βασιστεί κατά κύριο λόγο στο βιβλίο του M.W. Frazier [MF], και δευτερευόντως (όσον αφορά τη γραμμική άλγεβρα) στο βιβλίο του S. Axler [SA].

# Περιεχόμενα

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>0</b> | <b>Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας</b>                         | <b>5</b>  |
| <b>1</b> | <b>Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)</b>           | <b>9</b>  |
| 1.1      | Ορισμοί και βασικές ιδιότητες . . . . .                    | 9         |
| 1.2      | Μεταθετικά Αναλλοίωτοι Γραμμικοί Μετασχηματισμοί . . . . . | 17        |
| <b>2</b> | <b>Ο Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)</b>               | <b>26</b> |

## 0 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθενται οι βασικοί ορισμοί και τα απαραίτητα θεωρήματα της Γραμμικής Άλγεβρας που θεμελιώνουν τη θεωρία του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier. Το υλικό παρουσιάζεται με συνοπτικό τρόπο, καθώς στόχος είναι να λειτουργήσει ως σημείο αναφοράς για τα επόμενα κεφάλαια και όχι ως μια εξαντλητική εισαγωγή στο αντικείμενο. Για τον λόγο αυτό, παραλείπονται οι αποδείξεις και ορισμένοι στοιχειώδεις ορισμοί, ενώ δίνονται οι αντίστοιχες βιβλιογραφικές παραπομπές για περαιτέρω μελέτη. Το περιεχόμενο του κεφαλαίου βασίζεται στα συγγράμματα των S. Axler [SA] και M.W. Frazier [MF].

**Ορισμός 0.1** (Ορθογώνιο και Ορθοκανονικό Σύνολο). Δύο διανύσματα  $u, v \in V$  ονομάζονται ορθογώνια (κάθετα) αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν:

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Ένα σύνολο διανυσμάτων  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  ονομάζεται:

- Ορθογώνιο, αν  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  για κάθε  $i \neq j$ .
- Ορθοκανονικό, αν είναι ορθογώνιο και επιπλέον κάθε διάνυσμα έχει μοναδιαίο μήκος ( $\|e_i\| = 1$ ). Δηλαδή:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

**Ορισμός 0.2** (Γραμμική Ανεξαρτησία). Ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  του χώρου  $V$  ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο, ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων ισούται με μηδέν:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0$$

αν και μόνον εάν όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν ( $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ ).

**Λήμμα 0.1.** Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και  $B$  ένα ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων πεπερασμένου πλήθους υποσύνολο του  $V$  τέτοιο ώστε  $0 \notin B$ . Τότε το  $B$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Απόδειξη. Βλέπε ([MF], σελ. 84)

□

**Ορισμός 0.3** (Γραμμική Θήκη - Span). Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα  $F$  και  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ . Ονομάζουμε γραμμική θήκη (linear span) των διανυσμάτων αυτών, το σύνολο όλων των δυνατών γραμμικών συνδυασμών τους. Συμβολίζεται ως:

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k : c_i \in F\}$$

Αν ισχύει  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ , τότε λέμε ότι τα διανύσματα αυτά παράγουν τον χώρο  $V$ .

**Ορισμός 0.4** (Βάση). Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος. Ένα σύνολο διανυσμάτων  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ονομάζεται βάση του  $V$ , αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. Τα διανύσματα  $v_1, \dots, v_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Τα διανύσματα παράγουν τον χώρο  $V$ , δηλαδή  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ .

*Παρατήρηση.* Η σημαντικότερη συνέπεια του ορισμού της βάσης είναι η μοναδικότητα της αναπαράστασης. Αν το  $\mathcal{B}$  είναι βάση, τότε κάθε διάνυσμα  $u \in V$  γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης:

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

Οι μοναδικοί αριθμοί  $c_i$  ονομάζονται συντεταγμένες του  $u$  ως προς τη βάση  $\mathcal{B}$ .

**Θεώρημα 0.1.** Έστω  $V$  ένας  $n$ -διάστατος γραμμικός χώρος, και  $v_1, v_2, \dots, v_n$  διακριτά διανύσματα στο  $V$ . Τότε τα  $v_1, v_2, \dots, v_n$  είναι γραμμικός ανεξάρτητα αν και μόνον αν  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$

Απόδειξη. Βλέπε ([MF], σελ: 45) □

**Ορισμός 0.5.** Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα  $\mathbb{F}$  και  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  μία βάση του  $V$ . Από τον ορισμό της βάσης, για κάθε  $v \in V$  υπάρχουν μοναδικά  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}$  τέτοια ώστε  $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ . Ορίζουμε  $[v]_S$  ως το διάνυσμα στο  $\mathbb{F}^n$  με συντεταγμένες  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , δηλαδή:

$$[v]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (0.1)$$

Ονομάζουμε  $a_j$  την  $j$ -οστή συντεταγμένη του  $v$  ως προς τη βάση  $S$ .

**Λήμμα 0.2.** Έστω  $V$  ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και ορθοκανονική βάση:  $R = \{u_1, \dots, u_n\}$  του χώρου  $V$  τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Για κάθε  $v \in V$ ,

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j \quad (0.2)$$

2. Για κάθε  $v, w \in V$ ,

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle \overline{\langle w, u_j \rangle} \quad (0.3)$$

3. Για κάθε  $v \in V$ ,

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle v, u_j \rangle|^2 \quad (0.4)$$

Απόδειξη. Βλέπε ([SA], σελ. 200) □

**Ορισμός 0.6** (Γραμμικός Μετασχηματισμός). Έστω  $V$  και  $W$  δύο διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα  $\mathbb{F}$ . Μια συνάρτηση  $T : V \rightarrow W$  ονομάζεται γραμμικός μετασχηματισμός ή γραμμική απεικόνιση, αν διατηρεί τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Συγκεκριμένα, πρέπει να ισχύουν τα εξής για κάθε  $u, v \in V$  και  $\alpha \in \mathbb{C}$ :

1.

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

2.

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

*Παρατήρηση.* Στην περίπτωση που ο χώρος άφιξης ταυτίζεται με τον χώρο ορισμού ( $W = V$ ), τότε ο μετασχηματισμός  $T : V \rightarrow V$  ονομάζεται συχνά γραμμικός τελεστής.

**Θεώρημα 0.2.** Έστω  $U, V$  διανυσματικοί χώροι διάστασης  $n$ , και γραμμικός τελεστής  $T : U \rightarrow V$ . Τότε ο  $T$  είναι 1-1 αν και μόνον εάν ο  $T$  είναι επί.

*Απόδειξη.* Βλέπε ([SA], σελ. 84) □

**Λήμμα 0.3** (Πίνακας Αναπαράστασης Γραμμικού Μετασχηματισμού). Έστω  $U$  και  $V$  διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης πάνω από ένα σώμα  $\mathbb{F}$ . Υποθέτουμε ότι  $\mathcal{R} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  είναι μια βάση του  $U$ ,  $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  είναι μια βάση του  $V$ , και  $T : U \rightarrow V$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

Επειδή  $T(u_j) \in V$  για κάθε  $j$ , υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές  $a_{ij}$  (για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ ), τέτοιοι ώστε:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m \\ T(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

Έστω  $A$  ο  $m \times n$  πίνακας του οποίου η  $k$ -οστή στήλη αποτελείται από τους συντελεστές  $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}$  του αναπτύγματος του  $T(u_k)$ , δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

Τότε ισχύει:

$$[T(u)]_{\mathcal{S}} = A[u]_{\mathcal{R}} \quad \text{για κάθε } u \in U. \quad (0.6)$$

Επιπλέον, ο  $A$  είναι ο μοναδικός πίνακας που ικανοποιεί τη σχέση (0.6).

*Απόδειξη.* Βλέπε ([MF], σελ. 48) □

*Παρατήρηση.* Ο  $A$  καλείται πίνακας αναπαράστασης του  $T$  από τη βάση  $\mathcal{R}$  στη βάση  $\mathcal{S}$  ( $[T(u)]_{\mathcal{S}} = A[u]_{\mathcal{R}}$ ). Ενίοτε συμβολίζεται και ως  $A_T$ .

**Λήμμα 0.4.** Έστω  $U$  και  $V$  διανυσματικοί χώροι διάστασης  $n$  πάνω από ένα σώμα  $\mathbb{F}$ . Υποθέτουμε ότι  $T : U \rightarrow V$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Έστω  $\mathcal{R}$  μια βάση του  $U$  και  $\mathcal{S}$  μια βάση του  $V$ . Έστω  $A_T$  ο πίνακας που αναπαριστά τον  $T$  από τη βάση  $\mathcal{R}$  στη βάση  $\mathcal{S}$ . Τότε, ο  $T$  είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός αν και μόνο αν ο  $A_T$  είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

*Απόδειξη.* Βλέπε ([MF], σελ. 47) □

**Ορισμός 0.7.** Έστω  $V$  διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και  $T : V \rightarrow V$  γραμμικός μετασχηματισμός. Εάν ο διανυσματικός χώρος  $V$  έχει βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του  $T$ , τότε λέμε ότι ο  $T$  είναι διαγωνοποιήσιμος.



# 1 Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου παρατίθενται οι βασικοί ορισμοί που αφορούν τον Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier και τη βάση Fourier, καθώς και οι ιδιότητές τους. Στη συνέχεια, η παρουσιάζεται η απόδειξη ενός θεμελιώδους θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο οι μεταθετικά αναλλοίωτοι γραμμικοί μετασχηματισμοί διαγωνοποιούνται από τη βάση Fourier. Το υλικό της ενότητας είναι βασισμένο στο βιβλίο του M.W. Frazier [MF].

## 1.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Για τον Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier θα εργαζόμαστε με διανύσματα  $N$  διαστάσεων πάνω από το  $\mathbb{C}$ . Ο συμβολισμός θα έχει δύο διαφοροποιήσεις από τον συνήθη τρόπο απεικόνισης διανυσμάτων, οι λόγοι των οποίων θα γίνουν σαφείς παρακάτω. Η πρώτη αλλαγή είναι ότι οι δείκτες των στοιχείων των διανυσμάτων θα ακολουθούν την αρίθμηση  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  αντί για  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Η δεύτερη είναι ότι κάθε στοιχείο ενός διανύσματος  $z$ , αντί να απεικονίζεται ως  $z_j$ , θα απεικονίζεται ως  $z(j)$ . Αυτός ο τρόπος μας βοηθάει να αντιληφθούμε το  $z$  ως μία συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο  $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Επίσης θα κάνουμε τη σύμβαση να απεικονίζουμε το διάνυσμα  $z$  σε οριζόντια αντί για κάθετη μορφή:

$$z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1))$$

Ωστόσο, για λόγους συντομίας και αποφυγής περαιτέρω διευκρινήσεων όπου είναι βολικό θα αντιλαμβανόμαστε το  $z$  ως διάνυσμα στήλη:

$$z = \begin{bmatrix} z(0) \\ z(1) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Η παραπάνω θεώρηση μας επιτρέπει να διατηρήσουμε τη συνήθη γραφή  $Az$  για το γινόμενο ενός πίνακα  $N \times N$  με το διάνυσμα  $z$ . Το σύνολο όλων αυτών των μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στο  $\mathbb{Z}_N$ , συγκροτεί τον διανυσματικό χώρο  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Ο χώρος αυτός ορίζεται τυπικά ως:

$$\ell^2(\mathbb{Z}_N) = \{z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1)) : z(j) \in \mathbb{C}, 0 \leq j \leq N-1\}$$

Με τη συνήθη κατά συνιστώσα πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, ο χώρος  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο διάστασης  $N$  πάνω από το  $\mathbb{C}$ .

Μία βάση για τον  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  είναι η τυπική, γνωστή και ως Ευκλείδεια βάση  $\mathcal{E} = \{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}$ , όπου:

$$e_j(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = j \\ 0 & \text{αν } n \neq j \end{cases}$$

Σε αυτό το πλαίσιο, το μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ορίζεται ως:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \overline{w(k)} \quad (1.2)$$

και την επαγόμενη νόρμα (γνωστή και ως  $\ell^2$  νόρμα):

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$$

Διατηρούμε την έννοια της ορθογωνιότητας:  $z \perp w$  αν και μόνο αν  $\langle z, w \rangle = 0$ .

Θα κάνουμε μία ακόμη σύμβαση. Αρχικά, για  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , το  $z(j)$  ορίζεται για  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . Τώρα επεκτείνουμε το  $z$  ώστε να ορίζεται σε όλους τους ακεραίους, απαιτώντας το  $z$  να είναι περιοδικό με περίοδο  $N$ :

$$z(j+N) = z(j), \quad \text{για κάθε } j \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

Συνεπώς, για να βρούμε την τιμή του  $z(j)$  για  $j \notin \{0, 1, \dots, N-1\}$ , αρκεί να προσθέσουμε (ή να αφαιρέσουμε) ακέραια πολλαπλάσια  $mN$  του  $N$  στο  $j$ , μέχρι το αποτέλεσμα να βρεθεί στο σύνολο  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ .

*Παρατήρηση.* Η τιμή του  $z(j)$  εξαρτάται μόνο από το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $j$  με το  $N$  ( $j \pmod{N}$ ). Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε ότι το  $z$  ορίζεται πάνω στις κλάσεις ισοδυναμίας του  $\mathbb{Z}$  modulo  $N$ . Ειδικότερα, μπορούμε να ορίσουμε το  $z$  σε οποιοδήποτε άλλο σύνολο  $N$  διαδοχικών ακεραίων αντί του  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ .

**Ορισμός 1.1.** Ορίζουμε τα διανύσματα  $E_0, E_1, \dots, E_{N-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ως εξής:

$$\begin{aligned} E_0(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}}, & n &= 0, 1, \dots, N-1 \\ E_1(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i n/N}, & n &= 0, 1, \dots, N-1 \\ E_2(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i 2n/N}, & n &= 0, 1, \dots, N-1 \\ &\vdots \\ E_{N-1}(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i (N-1)n/N}, & n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Πιο συνοπτικά, ο γενικός τύπος δίνεται ως:

$$E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i m n/N}, \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.4)$$

**Λήμμα 1.1.** Το σύνολο  $E := \{E_0, E_1, \dots, E_{N-1}\}$  αποτελεί ορθοκανονική βάση για τον χώρο  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

Απόδειξη. Έστω  $j, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Τότε:

$$\begin{aligned}
\langle E_j, E_k \rangle &= \sum_{m=0}^{N-1} E_j(m) \overline{E_k(m)} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i j m / N} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i k m / N}} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{2\pi i j m / N} e^{-2\pi i k m / N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i (j-k) m / N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (e^{2\pi i (j-k) / N})^m
\end{aligned}$$

όπου για  $j = k$  έχουμε:

$$\langle E_j, E_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (e^{2\pi i 0 / N})^m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{N} = 1$$

ενώ για  $j \neq k$ :

$$\langle E_j, E_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (e^{2\pi i (j-k) / N})^m = \frac{1 - (e^{2\pi i (j-k) / N})^N}{1 - (e^{2\pi i (j-k) / N})} = \frac{1 - e^{2\pi i (j-k)}}{1 - (e^{2\pi i (j-k) / N})} = 0$$

αφού  $j - k \in \mathbb{Z}$  έχουμε ότι  $e^{2\pi i (j-k)} = 1$  και  $1 \neq (e^{2\pi i (j-k) / N})$  για  $j \neq k$  με  $j, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Επομένως αυτό μας δίνει ότι:  $E_j \perp E_k$  για  $j \neq k$  και  $\|E_j\| = 1$  για κάθε  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Οπότε το σύνολο  $E$  είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο, και σύμφωνα με το λήμμα 0.1, το σύνολο αυτό είναι γραμμικός ανεξάρτητο. Αρά από το θεώρημα 0.1 έχουμε ότι το σύνολο  $E$  είναι βάση του  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$   $\square$

Επειδή το  $E$  αποτελεί ορθοκανονική βάση του  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  χρησιμοποιώντας το λήμμα 0.2, θα έχουμε για κάθε  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle E_m \tag{1.5}$$

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle \overline{\langle w, E_m \rangle} \tag{1.6}$$

$$\|z\|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |\langle z, E_m \rangle|^2 \tag{1.7}$$

όπου ο τύπος (1.2) μας δίνει:

$$\langle z, E_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i m n / N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n / N} \tag{1.8}$$

**Ορισμός 1.2.** Θεωρούμε  $z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Για  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , ορίζουμε:

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n / N} \quad (1.9)$$

Έστω

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \dots, \hat{z}(N-1)) \quad (1.10)$$

Τότε  $\hat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Η απεικόνιση  $\hat{\cdot}: \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , η οποία στέλνει το  $z$  στο  $\hat{z}$ , ονομάζεται **Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**, και συνήθως συμβολίζεται ως DFT (Discrete Fourier Transform).

Μία άμεση παρατήρηση είναι ότι η περιοδικότητα του  $z$  μεταφέρεται και στο  $\hat{z}$  (με περίοδο  $N$ ) αφού χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.9):

$$\begin{aligned} \hat{z}(m+N) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i (m+N)n / N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n / N} e^{-2\pi i N n / N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n / N} = \hat{z}(m) \end{aligned}$$

αφού  $e^{-2\pi i N n / N} = e^{-2\pi i n} = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ . Έτσι διαπιστώνουμε ότι το  $\hat{z}$  είναι καλώς ορισμένο στο  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  συμπεριλαμβανομένης και της παραπάνω σύμβασης ( $z(m)$  για κάθε  $m \in \mathbb{Z}$ ).

Μία ακόμη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι:

$$\hat{z}(m) = \sqrt{N} \langle z, E_m \rangle \quad (1.11)$$

τύπος ο οποίος προκύπτει απλώς συνδυάζοντας τους τύπους (1.8) και (1.9)

**Θεώρημα 1.1.** Έστω  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Τότε:

1. Τύπος αντιστροφής Fourier

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i m n / N} \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.12)$$

2. Σχέση Parseval

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) \overline{\hat{w}(m)} = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle \quad (1.13)$$

3. Τύπος Plancherel

$$\|z\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{z}(m)|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2 \quad (1.14)$$

Απόδειξη. Από τους τύπους (1.4),(1.5) και (1.11) θα έχουμε για το 1.:

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle E_m(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{z}(m) \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i m n / N} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i m n / N}$$

για το 2. θα χρειαστούμε τον τύπο (1.6), όπου:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle \overline{\langle w, E_m \rangle} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{z}(m) \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} \hat{w}(m)} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) \overline{\hat{w}(m)} = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle$$

και για το 3. χρησιμοποιώντας τον τύπο που μόλις αποδείξαμε (1.13) παίρνουμε:

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{z} \rangle = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2$$

□

Για να ερμηνεύσουμε τον τύπο αντιστροφής Fourier (1.12) θα χρειαστούμε και τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 1.3.** Για  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , ορίζουμε  $F_m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ως εξής:

$$F_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i m n / N} \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.15)$$

Έστω

$$\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_{N-1}\} \quad (1.16)$$

Ονομάζουμε το σύνολο  $\mathcal{F}$  βάση Fourier του  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

Από τον τύπο (1.4) παίρνουμε ότι

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{N}} E_m$$

και από το λήμμα 1.1 προκύπτει ότι το  $\mathcal{F}$  είναι μία ορθογώνια βάση του  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Αντικαθιστώντας τον τύπο (1.15) ο τύπος (1.12) παίρνει τη μορφή

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) F_m \quad (1.17)$$

Με άλλα λόγια αν αναπτύξουμε το  $z$  ως προς τη βάση  $\mathcal{F}$ , οι συντελεστές των  $F_m$  είναι τα  $\hat{z}(m)$ . Σύμφωνα με τον ορισμό 0.5 θα πάρουμε:

$$\hat{z} = [z]_{\mathcal{F}} \quad (1.18)$$

Δηλαδή ο τύπος αντιστροφής Fourier είναι στην ουσία ο τύπος αλλαγής βάσης για την βάση Fourier.

Παρατηρούμε ότι ο DFT 1.2 είναι γραμμικός μετασχηματισμός, επομένως σύμφωνα με το λήμμα 0.3 μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν πίνακα.

Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό θα ορίσουμε.

$$\omega_N = e^{-2\pi i / N}$$

και στην πιο γενική του μορφή:

$$\omega_N^{mn} = e^{-2\pi i mn/N} \quad (1.19)$$

Έτσι με αυτό τον ορισμό ο τύπος του DFT (1.9) γίνεται

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \omega_N^{mn} \quad (1.20)$$

Παρακάτω για να ταιριάζει με τον τρέχων συμβολισμό, θα ορίσουμε πίνακα του οποίου οι δείκτες ως προς τις στήλες και τις γραμμές θα είναι από το 0 μέχρι το  $N-1$ .

**Ορισμός 1.4.** Έστω  $W_N$  ο πίνακας  $[w_{mn}]_{0 \leq m, n \leq N-1}$  τέτοιος ώστε  $w_{mn} = \omega_N^{mn}$ . Οπότε ο πίνακας  $W_N$  γράφεται

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \dots & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Έτσι εάν θεωρήσουμε τα  $z, \hat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ως διανύσματα στήλες και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.21), (1.20) θα πάρουμε την αρκετά βολική σχέση:

$$\hat{z} = W_N z \quad (1.22)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για κάθε  $N \in \mathbb{N}$  ο πίνακας  $W_N$  είναι μοναδικός.

**Παράδειγμα 1.1.** Για  $n=2$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-\pi i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

**Πόρισμα 1.2.** Ο γραμμικός μετασχηματισμός  $\hat{\cdot}: \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  είναι 1-1 και επί επομένως αντιστρέφεται.

*Απόδειξη.* Έστω  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  τέτοια ώστε  $\hat{z} = \hat{w}$  τότε για κάθε  $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  θα έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{z}(m) &= \hat{w}(m) \\ \Rightarrow \hat{z}(m) - \hat{w}(m) &= 0 \end{aligned}$$

όμως

$$\Rightarrow \hat{z}(m) - \hat{w}(m) = (z - w)(m) = 0 \quad \text{για κάθε } m$$

αφού ο DFT είναι γραμμικός. Από τους τύπους (1.11), (1.5) θα έχουμε:

$$(z - w) = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z - w, E_m \rangle E_m = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} (z - w)(m) E_m = 0$$

Άρα  $z = w$ .

Επομένως η απεικόνιση  $\hat{\cdot}$  είναι 1-1, οπότε από το θεώρημα 0.2 είναι και επί, άρα αντιστρέφεται.  $\square$

Συγκεκριμένα από τον τύπο αντιστροφής Fourier (1.12) παίρνουμε την αντίστροφη απεικόνιση της  $\hat{\cdot}$  την οποία θα συμβολίσουμε  $\check{\cdot}$ .

**Ορισμός 1.5.** Για  $w = (w(0), w(1), \dots, w(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , ορίζουμε

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{2\pi i m n / N} \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.24)$$

και θεωρούμε

$$\check{w} = (\check{w}(0), \check{w}(1), \dots, \check{w}(N-1))$$

Η απεικόνιση  $\check{\cdot} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ονομάζεται αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier και συνήθως συμβολίζεται ως IDTF (Inverse Discrete Fourier Transform).

*Παρατήρηση.* Για κάθε  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  και για κάθε  $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  από τους τύπους (1.24), (1.12) θα έχουμε

$$(\hat{z})(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i m n / N} = z(n) \quad (1.25)$$

ή ισοδύναμα

$$(\hat{z})^\sim = z \quad (1.26)$$

και με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι για κάθε  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$

$$(\check{z})^\sim = z \quad (1.27)$$

Επειδή ο DFT είναι γραμμική απεικόνιση και αντιστρέφεται από το λήμμα 0.4 προκύπτει ότι ο πίνακας  $W_N$  είναι αντιστρέψιμος (Εδώ δηλαδή ο πίνακας  $W_N$  είναι ο πίνακας αναπαράστασης του DFT ως προς τις βάσεις  $\mathcal{E}$  και  $F$  του  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ). Έτσι παίρνουμε άμεσα τη σχέση  $z = W_N^{-1} \hat{z}$ . Θεωρώντας  $w = \hat{z}$  από τους τύπους (1.22), (1.25) παίρνουμε ότι για κάθε  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ισχύει ότι:

$$\check{w} = W_N^{-1} w \quad (1.28)$$

Παρόλο που ο υπολογισμός του  $W_N^{-1}$  μπορεί να γίνει άμεσα μέσω του  $W_N$ , πιο απλά, χρησιμοποιώντας τους τύπους (1.24), (1.19) θα έχουμε

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{2\pi i m n / N} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} \omega_N^{-mn} w(m) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} \overline{\omega_N^{mn}} w(m)$$

Αυτό δείχνει ότι το στοιχείο  $(n, m)$  του πίνακα  $W_N^{-1}$  είναι το  $\frac{1}{N} \overline{\omega_N^{nm}}$ .

Αν συμβολίσουμε με  $\overline{W}_N$  τον πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι οι μιγαδικοί συζυγείς των στοιχείων του  $W_N$ , έχουμε:

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{W}_N \quad (1.29)$$

Όπως και στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier έτσι και εδώ θα επεκτείνουμε το  $\check{w}(n)$  περιοδικά (με περίοδο  $N$ ,  $\check{w}(n+N) = \check{w}(n)$ ) για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Παρατήρηση.* Χρησιμοποιώντας τους τύπους (1.24), (1.9) για  $k = -n$  θα έχω

$$\check{w}(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{2\pi i m k / N} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{-2\pi i m n / N} = \frac{1}{N} \hat{w}(n) = \frac{1}{N} \hat{w}(-k)$$

Επομένως για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  θα έχουμε

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \hat{w}(-n) \quad (1.30)$$

και επειδή το  $\check{w}$  έχει περίοδο  $N$  θα πάρουμε τη σχέση:

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \hat{w}(N-n) \quad (1.31)$$

Η οποία είναι περισσότερο βολική καθώς  $n \in \{1, \dots, N-1\}$  αν και μόνον αν  $N-n \in \{1, \dots, N-1\}$ , ενώ στην περίπτωση που το  $n=0$ , έχουμε  $N-n=n$ .

Συνοψίζοντας τα βασικά στοιχεία σχετικά με τον DFT, έχουμε ότι, η απεικόνιση  $\hat{\cdot}: \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός με αντίστροφο την απεικόνιση  $\check{\cdot}$ . Ερμηνεύοντας τον τύπο αντιστροφής Fourier (1.12) στη μορφή (1.17):

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) F_m$$

όπου  $F_m$  είναι το  $m$ -οστό στοιχείο της βάσης Fourier. Συνεπώς, το  $\hat{z}(m)$  είναι το "βάρος" του διανύσματος  $F_m$  που χρησιμοποιείται για τη σύνθεση του  $z$ .

Για να κατανοήσουμε τη φυσική σημασία του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τα δομικά του στοιχεία, δηλαδή τα διανύσματα βάσης  $e^{2\pi i m n / N}$ . Κάθε τέτοιο διάνυσμα, το οποίο αντιστοιχεί σε έναν δείκτη  $m$ , αντιπροσωπεύει ουσιαστικά μια «καθαρή συχνότητα». Ειδικότερα, για την τιμή  $m=0$ , το διάνυσμα παραμένει σταθερό χωρίς να παρουσιάζει ταλαντώσεις. Καθώς όμως η τιμή του  $m$  αυξάνεται, η αντίστοιχη συνάρτηση αρχίζει να ταλαντώνεται εντονότερα στο ίδιο διάστημα. Αυτή η αύξηση του ρυθμού ταλάντωσης μεταφράζεται σε υψηλότερη συχνότητα, κάτι που στην ακουστική θα γινόταν αντιληπτό ως ένας οξύτερος τόνος.

Ωστόσο, υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο που συχνά προκαλεί σύγχυση: ένα μεγαλύτερο  $m$  δεν συνεπάγεται απαραίτητα υψηλότερη συχνότητα. Λόγω της περιοδικότητας των μιγαδικών αριθμών, η συνάρτηση για  $m=N$  ταυτίζεται πλήρως με τη συνάρτηση για  $m=0$ . Κατά συνέπεια, οι συχνότητες κατανέμονται με τέτοιο τρόπο ώστε οι χαμηλές συχνότητες να βρίσκονται στα δύο άκρα του φάσματος (δηλαδή όταν το  $m$  είναι κοντά στο 0 ή στο  $N$ ), ενώ οι υψηλές συχνότητες συγκεντρώνονται στο μέσο του φάσματος, με την ταχύτερη ταλάντωση να εμφανίζεται όταν το  $m$  πλησιάζει το  $N/2$ . Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε



$N = 16$ , η συχνότητα  $m = 15$  δεν είναι η ταχύτερη, αλλά στην πραγματικότητα αντιστοιχεί σε μια πολύ αργή ταλάντωση (ισοδύναμη με την  $m = 1$ ), η οποία απλώς περιστρέφεται με αντίθετη φορά.

Τι μας δείχνει το μέτρο  $|\hat{z}(m)|$ ; Αφού καταλάβαμε ότι κάθε  $m$  είναι μια συχνότητα, τότε ο συντελεστής  $\hat{z}(m)$  που υπολογίζει ο DFT είναι το «βάρος» αυτής της συχνότητας μέσα στο σήμα μας. Κοιτάζοντας το μέτρο του (πόσο μεγάλο είναι το νούμερο), καταλαβαίνουμε τη δομή του σήματος: αν το  $|\hat{z}(m)|$  είναι μεγάλο γύρω από το  $N/2$ , τότε το σήμα μας αλλάζει πολύ γρήγορα (έχει πολλές λεπτομέρειες ή οξύ ήχο), ενώ αν το  $|\hat{z}(m)|$  είναι μεγάλο μόνο κοντά στο 0 και στο  $N$ , τότε το σήμα μας είναι «αργό» και ομαλό.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πως "συμπεριφέρεται" ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) υπό την επίδραση κάποιων τελεστών.

**Ορισμός 1.6** (Ο Τελεστής Μεταφοράς  $R_k$ ). Έστω  $k \in \mathbb{Z}$ . Ορίζουμε τελεστή  $R_k : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ως εξής:

$$(R_k z)(n) = z(n - k) \quad \text{για } n \in \mathbb{Z} \quad (1.32)$$

Ονομάζουμε τον τελεστή  $R_k$ , Τελεστή Μεταφοράς  $k$  θέσεων ή απλώς Τελεστή Μεταφοράς.

Ουσιαστικά ο τελεστής μεταφοράς  $R_k$  "στρέφει" το διάνυσμα  $z$  κατά  $k$  θέσεις. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πως ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier επηρεάζεται από αυτόν τον Τελεστή.

**Ορισμός 1.7.** Έστω  $z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Τότε ορίζουμε  $\bar{z}$  να είναι το διάνυσμα  $\bar{z} = (\bar{z}(0), \bar{z}(1), \dots, \bar{z}(N-1))$  Δηλαδή:  $\bar{z}(n) = \overline{z(n)}$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier αποτελεί δηλαδή τον τελεστής αλλαγής βάσης από την Ευκλείδεια βάση  $\mathcal{E}$  στη βάση Fourier  $F$ . Ερμηνεύοντας τα στοιχεία  $F_m$  της βάσης  $F$ , ως "καθαρές συχνότητες", ο τύπος αντιστροφής Fourier (1.12) εκφράζει το σήμα ως υπέρθεση αυτών των συχνοτήτων. Συνεπώς, οι συντελεστές  $\hat{z}(m)$  του μετασχηματισμού ποσοτικοποιούν τη συμμετοχή (το "βάρος") της κάθε "καθαρής συχνότητας"  $F_m$  στη σύνθεση του σήματος  $z$ .

## 1.2 Μεταθετικά Αναλλοίωτοι Γραμμικοί Μετασχηματισμοί (Translation-Invariant Linear Transformations)

Στο πλαίσιο της μαθηματικής μοντελοποίησης της επεξεργασίας σήματος, κάθε σήμα —είτε πρόκειται για αναλογικό ήχο είτε για ψηφιακά δεδομένα— μοντελοποιείται ως μια συνάρτηση, ενώ κάθε σύστημα επεξεργασίας αντιμετωπίζεται ως ένας τελεστής μετασχηματισμού  $T$  που δέχεται μια είσοδο και παράγει μια έξοδο. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στα Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα (LTI), τα οποία αποτελούν την ιδανική προτυποποίηση φυσικών συσκευών, όπως για παράδειγμα οι ενισχυτές. Η ιδιότητα της Γραμμικότητας διασφαλίζει ότι το σύστημα υπακούει στην αρχή της επαλληλίας, δηλαδή η αντίδραση σε ένα σύνθετο άθροισμα σημάτων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντιδράσεων. Παράλληλα, η ιδιότητα της Χρονικής Αμεταβλητότητας (Translation Invariance) εγγυάται τη σταθερότητα της συμπεριφοράς του συστήματος στον χρόνο: μια χρονική ολίσθηση (καθυστερήση) του σήματος εισόδου κατά  $k$  μέσω του τελεστή  $R_k$ , προκαλεί ακριβώς την ίδια χρονική ολίσθηση στο σήμα εξόδου, χωρίς να αλλοιώνεται η μορφή του.

**Ορισμός 1.8.** Έστω  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  γραμμικός μετασχηματισμός. Λέμε ότι ο  $T$  είναι μεταθετικά αναλλοίωτος εάν

$$T(R_k z) = R_k T(z) \quad \text{για κάθε } z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z} \quad (1.33)$$

Δηλαδή μόλις ορίσαμε τους τελεστές οι οποίοι αντιμετωπίζονται με τους τελεστές μεταφοράς  $R_k$ . Το σημαντικότερο ίσως χαρακτηριστικό της βάσης Fourier  $F$  είναι η ιδιότητα της να διαγωνοποιεί τους μεταθετικά αναλλοίωτους γραμμικούς μετασχηματισμούς, θεώρημα το οποίο θα αποδείξουμε παρακάτω. Επίσης όπως προαναφέραμε τα μεταθετικά αναλλοίωτα συστήματα αποτελούν την πιο φυσική περιγραφή των πραγματικών εφαρμογών. Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι οι διαγωνοποιήσιμοι τελεστές προσφέρουν τη μέγιστη υπολογιστική ευκολία. Συνεπώς, μέσω της ορθογώνιας βάσης Fourier, διαπιστώνουμε ότι τα πιο συνηθισμένα φυσικά συστήματα είναι ταυτόχρονα και τα πιο διαχειρίσιμα μαθηματικά, καθώς είναι διαγωνοποιήσιμα και μάλιστα από την ίδια βάση. Επιπλέον η βάση αυτή είναι ορθογώνια.

Τώρα θα επεκτείνουμε τις συμβάσεις που κάναμε για τα διανύσματα  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  σε πίνακες διάστασης  $N \times N$ . Οι δείκτες του πίνακα θα ανήκουν στο διάστημα  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ . Δηλαδή για τον πίνακα  $A$  διάστασης  $N \times N$  θα έχουμε:  $A = [a_{m,n}]_{0 \leq m, n \leq N-1}$ . Και στη συνέχεια θα ορίσουμε τα στοιχεία του πίνακα  $A$  για κάθε  $m, n \in \mathbb{Z}$  με περίοδο  $N$ . Δηλαδή:

$$a_{m+N,n} = a_{m,n}, \quad a_{m,n+N} = a_{m,n} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}$$

Με αυτόν τον συμβολισμό παίρνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα  $A$  με ένα διάνυσμα  $z$  θα είναι ένα διάνυσμα του οποίου η  $m$ -οστή συντεταγμένη θα ισούται με:

$$Az(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n} z(n) \quad (1.34)$$

**Ορισμός 1.9** (Κυκλικός Πίνακας). Ένας πίνακας  $A = [a_{m,n}]_{0 \leq m, n \leq N-1}$  με περίοδο  $N$  (όπως περιγράφηκε στη παραπάνω σύμβαση), θα λέμε ότι είναι κυκλικός εάν:

$$a_{m+k,n+k} = a_{m,n} \quad (1.35)$$

για όλα τα  $k, m, n \in \mathbb{Z}$

*Παρατήρηση.* Ένας πίνακας για να είναι κυκλικός αρκεί  $a_{m+1,n+1} = a_{m,n}$  για κάθε  $m, n \in \mathbb{Z}$ , καθώς μετά από  $k$  επαναλήψεις φτάνουμε στον τύπο (1.35).

**Παράδειγμα 1.2.** Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 3 & 5i & 4 & -i \\ -i & 3 & 5i & 4 \\ 4 & -i & 3 & 5i \\ 5i & 4 & -i & 3 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

είναι κυκλικός.

**Ορισμός 1.10** (Συνέλιξη). Θεωρούμε  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Η συνέλιξη (Συμβ:  $z * w$ , όπου  $z * w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ) είναι το διάνυσμα του οποίου κάθε συντεταγμένη δίνεται από τον τύπο:

$$(z * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n)w(n)$$

για όλα τα  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Ορισμός 1.11** (Τελεστής Συνέλιξης). Θεωρούμε ένα  $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Ορίζουμε  $T_b : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ως εξής:

$$T_b(z) = b * z$$

Κάθε τελεστής  $T$  της μορφής  $T = T_b$  για κάποιο  $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , ονομάζεται τελεστής συνέλιξης.

*Παρατήρηση.* Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε τελεστής συνέλιξης είναι γραμμικός τελεστής.

**Ορισμός 1.12.** Ορίζουμε  $\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ως εξής:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0 \\ 0 & \text{αν } i \in \{1, \dots, N-1\} \end{cases}$$

*Σχόλιο.* Αυτή είναι η διακριτή εκδοχή της συνάρτησης Δέλτα του Dirac, επίσης γνωστή και ως unit impulse. Πρακτικά το διάνυσμα  $\delta$  είναι απλώς το  $e_0$ .

**Ορισμός 1.13** (Πολλαπλασιαστής Fourier). Έστω  $m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Ορίζουμε  $T_{(m)} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ως εξής:

$$T_{(m)}(z) = (m\hat{z}) \quad (1.37)$$

όπου το  $m\hat{z}$  θεωρούμε το διάνυσμα που προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε κατά συντεταγμένη τα διανύσματα  $m, \hat{z}$ , δηλαδή:

$$(m\hat{z})(n) = m(n)\hat{z}(n) \quad \text{για κάθε } n$$

Ένας τελεστής αυτής της μορφής ονομάζεται τελεστής πολλαπλασιαστή Fourier, ή απλώς πολλαπλασιαστής Fourier.

*Παρατήρηση.* Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε πολλαπλασιαστής Fourier είναι γραμμικός τελεστής.

*Σημείωση.* Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε το  $T(m)$  είναι να παρατηρήσουμε ότι για κάθε  $k$

$$(T_{(m)}(z))(k) = (m\hat{z})(k) = m(k)\hat{z}(k), \quad (1.38)$$

απλώς εφαρμόζοντας διακριτό μετασχηματισμό Fourier στην εξίσωση (1.37).

Ο τύπος αντιστροφής Fourier (1.17) για το  $T_{(m)}(z)$  για κάποιο  $z \in \ell^2(\mathbb{Z})_{\mathbb{N}}$  μας δίνει:

$$T_{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} (T_{(m)}(z))(k) F_k = \sum_{k=0}^{N-1} m(k)\hat{z}(k) F_k$$

Η τελευταία ισότητα προέκυψε από τον τύπο (1.38). Από αυτόν τον τύπο καταλαβαίνουμε ότι ο τελεστής  $T_{(m)}$  πολλαπλασιάζει κάθε συντελεστή του διακριτού μετασχηματισμού Fourier με την αντίστοιχη συντεταγμένη του διανύσματος  $m$ .

Και τώρα ακολουθεί το πιο σημαντικό θεώρημα του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

**Θεώρημα 1.3.** Έστω  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  γραμμικός μετασχηματισμός. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- i. Ο  $T$  είναι μεταθετικά αναλλοίωτος.
- ii. Ο πίνακας  $A$  ο οποίος αναπαριστά τον γραμμικό τελεστή  $T$  ( $T(z) = Az$ ) ως προς την Ευκλείδεια βάση  $\mathcal{E}$  είναι κυκλικός.

iii. Ο  $T$  είναι τελεστής συνέλιξης.

iv. Ο  $T$  είναι πολλαπλασιαστής Fourier.

v. Ο πίνακας  $A_F$  ο οποίος αναπαριστά τον γραμμικό τελεστή  $T$  ως προς τη βάση Fourier είναι διαγώνιος.

Σημείωση. Η πρόταση v. μας λέει ουσιαστικά ότι ο  $T$  διαγωνοποιείται από τη βάση Fourier.

Απόδειξη. (i.  $\Rightarrow$  ii.) Έστω  $T$  γραμμικός τελεστής μεταθετικά αναλλοίωτος και  $A$  ο πίνακας που αναπαριστά τον γραμμικό τελεστή ως προς την ευκλείδεια βάση  $\mathcal{E}$ . Δηλαδή  $T(z) = Az$ . Από την παρατήρηση στον ορισμό 1.9, για να δείξουμε ότι ένας πίνακας είναι κυκλικός αρκεί να δείξουμε ότι  $a_{m+1,n+1} = a_{m,n}$  για κάθε  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Έστω  $m, n \in \mathbb{Z}$ , τότε:

$$\begin{aligned} a_{m+1,n+1} &= (Ae_{n+1})(m+1) \\ &= (T(e_{n+1}))(m+1) \\ &= (T(R_1 e_n))(m+1) \\ &\stackrel{(*)}{=} (R_1 T(e_n))(m+1) \\ &= T(e_n)(m) \\ &= a_{m,n} \end{aligned}$$

όπου  $(*)$  χρησιμοποιήσαμε ότι ο  $T$  είναι μεταθετικά αναλλοίωτος.

Σημείωση. Εδώ πήραμε  $e_n \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  με τις γνωστές από πριν συμβάσεις. Δηλαδή  $e_n(m) = 1$  αν και μόνον αν  $\exists k \in \mathbb{Z}$  τέτοιο ώστε  $m = n + kN$ . Έτσι έχουμε ότι  $e_{n+N} = e_n$  και ότι  $R_1 e_n = e_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ .

(ii.  $\Rightarrow$  iii.) Έστω πίνακας  $A = [a_{m,n}]_{0 \leq m, n \leq N-1}$  τέτοιος ώστε  $T(z) = Az$  για κάθε  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , ο οποίος είναι κυκλικός. Επιλέγουμε το διάνυσμα  $b$  να είναι η πρώτη στήλη του πίνακα  $A$  ( $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  τ.ω.  $b(n) = a_{n,0}$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$  και θα δείξουμε ότι  $T = T_b$  (ορισμός 1.11). Αρχικά επειδή ο  $A$  είναι κυκλικός θα έχουμε ότι  $a_{m,n} = a_{m-n,0} = b(m-n)$  για κάθε  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Έστω  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  και  $m \in \mathbb{Z}$ , τότε:

$$Az(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n} z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n) z(n) = b * z(m)$$

Δηλαδή:  $T(z) = Az = b * z$  για κάθε  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Οπότε  $T \equiv T_b$ . Επομένως ο  $T$  είναι τελεστής συνέλιξης.

(iii.  $\Rightarrow$  i.) Έστω  $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  και  $T_b$  τελεστής συνέλιξης. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο  $T_b$  είναι μεταθετικά αναλλοίωτος. Έστω  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  και  $k \in \mathbb{Z}$ . Τότε για κάθε  $m \in \mathbb{Z}$  έχουμε:

$$(T_b(R_k z))(m) = (b * R_k z)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n) R_k z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n) z(n-k) \quad (1.39)$$

Για να συνεχίσουμε την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 1.2.** Έστω περιοδική συνάρτηση  $h$  συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{Z}$  με περίοδο  $N$ . Τότε για κάθε  $m \in \mathbb{Z}$  ισχύει το ακόλουθο:

$$\sum_{n=m}^{m+N-1} h(n) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \quad (1.40)$$

Με άλλα λόγια οποιοδήποτε μερικό άθροισμα μήκους  $N$  μίας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο  $N$  δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$S_m = \sum_{n=m}^{m+N-1} h(n) = h(m) + h(m+1) + \cdots + h(m+N-1)$$

τότε

$$S_{m+1} = \sum_{n=m+1}^{m+N} h(n) = h(m+1) + h(m+2) + \cdots + h(m+N)$$

όμως

$$S_{m+1} - S_m = h(m+N) - h(m) = 0.$$

Δηλαδή

$$S_m = S_{m+1}.$$

Επομένως για  $m = 0$  θα έχουμε

$$S_0 = S_1 = \cdots = S_n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

□

Επιστρέφουμε στην απόδειξη και στην εξίσωση (1.39), όπου θα κάνουμε την αντικατάσταση  $n - k = l$  και θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (T_b(R_k z))(m) &= \sum_{l=-k}^{N-k-1} b(m-l-k)z(l) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} b(m-l-k)z(l) \\ &= b * z(m-k) \\ &= (R_k b * z)(m) \\ &= (R_k T_b(z))(m) \end{aligned}$$

Όπου για σταθεροποιημένα  $m, k \in \mathbb{Z}$ , και  $b, z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  θεωρήσαμε τη συνάρτηση  $h_{mk} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  με τύπο  $h_{mk}(l) = b(m-l-k)z(l)$ , η οποία είναι περιοδική (αφού και τα  $b, z$  είναι περιοδικά - με περίοδο  $N$ ), και τώρα από το λήμμα 1.2 φτάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Δηλαδή δείξαμε ότι:

$$T_b(R_k z) = R_k T_b(z)$$

Άρα ο  $T$  είναι μεταθετικά αναλλοίωτος.

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι:  $i. \Rightarrow ii. \Rightarrow iii. \Rightarrow i.$

Τώρα θα συνεχίσουμε με ένα μικρό αλλά πολύ σημαντικό λήμμα.

**Λήμμα 1.3.** Για κάθε  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ισχύει ότι  $w * \delta = w$ .

Απόδειξη. Για κάθε  $m \in \mathbb{Z}_N$  έχουμε:

$$(w * \delta)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n)\delta(n) = w(m)$$

Άρα

$$w * \delta = w$$

□

**Σχόλιο.** Το λήμμα 1.3 έχει την ακόλουθη ερμηνεία. Έστω ότι έχουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό  $T$  στο  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  (μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο τελεστής μοντελοποιεί έναν ενισχυτή). Και αυτός ο τελεστής είναι μεταθετικά αναλλοίωτος. Μέχρι τώρα στην απόδειξη έχουμε δείξει ότι κάθε μεταθετικά αναλλοίωτος γραμμικός μετασχηματισμός είναι τελεστής συνέλιξης  $T_b$  για κάποιο  $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Εάν γνωρίζουμε το  $b$ , τότε γνωρίζουμε πως επενεργεί ο τελεστής πάνω στο  $z$  (ή πως επενεργεί η ενισχυτής πάνω σε ένα σήμα). Το λήμμα 1.3 μας δείχνει πως μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα το  $b$ , αρκεί απλώς αρκεί απλώς να πάρουμε το  $T(\delta) = T_b(\delta) = b * \delta = b$ . Όπως προαναφέραμε το  $\delta$  ονομάζεται unit impulse, έτσι το  $b$  πολλές φορές συναντάτε με τον όρο impulse response του συστήματος.

Τώρα θα δούμε πως επενεργεί ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) στη συνέλιξη.

**Λήμμα 1.4.** Έστω  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Τότε για κάθε  $m \in \mathbb{Z}$  ισχύει ότι:

$$(z * w)(m) = \hat{z}(m)\hat{w}(m)$$

Απόδειξη. Έστω  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  και  $m \in \mathbb{Z}$ . Από τον ορισμό 1.2 έχουμε:

$$\begin{aligned} (z * w)(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} (z * w)(n) e^{-2\pi i m n / N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k) w(k) e^{-2\pi i m n / N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k) w(k) e^{-2\pi i m (n-k) / N} e^{-2\pi i m k / N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k) w(k) e^{-2\pi i m (n-k) / N} e^{-2\pi i m k / N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-2\pi i m k / N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k) e^{-2\pi i m (n-k) / N} \end{aligned} \quad (1.41)$$

τώρα στο μερικό άθροισμα  $\sum_{n=0}^{N-1} z(n-k) e^{-2\pi i m (n-k) / N}$  κάνω την αντικατάσταση  $n-k = l$  οπότε γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{N-1} z(n-k) e^{-2\pi i m (n-k) / N} = \sum_{l=-k}^{N-k-1} z(l) e^{-2\pi i m l / N}$$

όπου λόγω περιοδικότητας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 1.2, οπότε θα έχουμε:

$$\sum_{l=-k}^{N-k-1} z(l)e^{-2\pi i m l/N} = \sum_{l=0}^{N-1} z(l)e^{-2\pi i m l/N} = \hat{z}(m)$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το τύπο (1.9). Οπότε επιστρέφοντας στην εξίσωση (1.41) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi i m k/N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k)e^{-2\pi i m (n-k)/N} &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi i m k/N} \hat{z}(m) \\ &= \hat{z}(m) \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi i m k/N} \\ &= \hat{z}(m) \hat{w}(m) \end{aligned}$$

□

*Σχόλιο.* Δηλαδή ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μετατρέπει την "περίπλοκη" πράξη της συνέλιξης σε έναν "απλό" πολλαπλασιασμό.

(iii.  $\Leftrightarrow$  iv.) Έστω  $T_b$  τελεστής συνέλιξης για κάποιο  $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , τότε επιλέγουμε  $m = \hat{b}$  και θεωρούμε τον πολλαπλασιαστή Fourier  $T_{(m)}$ , οπότε για κάθε  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  έχουμε:

$$T_b(z) = b * z = ((b * z))^{\sim}$$

και από το λήμμα 1.4 αυτό μας δίνει:

$$((b * z))^{\sim} = (\hat{b}\hat{z})^{\sim} = (m\hat{z})^{\sim} = T_{(m)}(z)$$

Δηλαδή  $T_b \equiv T_{(m)}$ .

Αντίστροφα, έστω  $T_{(m)}$  πολλαπλασιαστής Fourier για κάποιο  $m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , τότε επιλέγουμε  $b = \hat{m}$  και θεωρούμε τον τελεστή συνέλιξης  $T_b$ , και αξιοποιώντας πάλι το λήμμα 1.4, για κάθε  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  θα έχουμε:

$$T_{(m)}(z) = (m\hat{z})^{\sim} = (\hat{b}\hat{z})^{\sim} = ((b * z))^{\sim} = b * z = T_b(z)$$

Δηλαδή  $T_{(m)} \equiv T_b$

Για την τελευταία συνεπαγωγή (iv.  $\Leftrightarrow$  v.) θα δείξουμε ότι ένας γραμμικός τελεστής  $T$  είναι πολλαπλασιαστής Fourier αν και μόνον αν ο πίνακας  $D$  που αναπαριστά τον  $T$  ως προς τη βάση Fourier ( $[T(z)]_{\mathcal{F}} = D[z]_{\mathcal{F}}$ ) είναι διαγώνιος.

(iv.  $\Rightarrow$  v.) Έστω  $T_{(m)}$  πολλαπλασιαστής Fourier για κάποιο  $m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Θεωρούμε τον διαγώνιο πίνακα  $D = [d_{m,n}]_{0 \leq m,n \leq N-1}$  με  $d_{n,n} = m(n)$  για κάθε  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  Από

τις σχέσεις (1.17), (1.38) έχουμε:

$$\begin{aligned}
[T_{(m)}(z)]_{\mathcal{F}} &= (T_{(m)}(z))^{\sim} = \begin{bmatrix} m(0)\hat{z}(0) \\ m(1)\hat{z}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ m(N-1)\hat{z}(N-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_{0,0}\hat{z}(0) \\ d_{1,1}\hat{z}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N-1,N-1}\hat{z}(N-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_{0,0} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & d_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}(0) \\ \hat{z}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{z}(N-1) \end{bmatrix} \\
&= D[z]_{\mathcal{F}}
\end{aligned}$$

Δηλαδή καταλήξαμε στο ότι ο κάθε πολλαπλασιαστής *Fourier*  $T_{(m)}$  αναπαριστάται από έναν διαγώνιο πίνακα  $D$  ως προς τη βάση *Fourier*.

(*v.*  $\Rightarrow$  *iv.*) Έστω γραμμικός τελεστής  $T$  ο οποίος αναπαριστάται από διαγώνιο πίνακα  $D = [d_{m,n}]_{0 \leq m, n \leq N-1}$  ως προς τη βάση *Fourier* (Δηλαδή  $[T(z)]_F = D[z]_F$ ). Τότε θεωρούμε το διάνυσμα  $m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  τέτοιο ώστε  $m(n) = d_{n,n}$  για κάθε  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  και θεωρούμε επίσης τον πολλαπλασιαστή *Fourier*  $T_{(m)}$  και θα έχουμε:



$$\begin{aligned}
[T(z)]_{\mathcal{F}} = D[z]_{\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} d_{0,0} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & d_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}(0) \\ \hat{z}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{z}(N-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_{0,0}\hat{z}(0) \\ d_{1,1}\hat{z}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N-1,N-1}\hat{z}(N-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m(0)\hat{z}(0) \\ m(1)\hat{z}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m(N-1)\hat{z}(N-1) \end{bmatrix} \\
&= (T_{(m)}(z))^{\wedge}
\end{aligned}$$

Δηλαδή  $T \equiv T_{(m)}$

Σχέση η οποία ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος 1.3. □

Τα αποτελέσματα του θεωρήματος 1.3 έχουν άμεση πρακτική εφαρμογή στους υπολογισμούς, καθώς κάθε γραμμικός μετασχηματισμός  $T$  που είναι μεταθετικά αναλλοίωτος αναπαρίσταται στην Ευκλείδεια βάση από έναν κυκλικό πίνακα  $A$ . Θεωρώντας το διάνυσμα  $b$  ως την πρώτη στήλη του  $A$ , ο μετασχηματισμός ταυτίζεται με τον τελεστή συνέλιξης  $T_b$ , ενώ ορίζοντας το  $m = \hat{b}$ , ο  $T$  λειτουργεί ως πολλαπλασιαστής Fourier  $T_{(m)}$ . Κατασκευάζοντας τον διαγώνιο πίνακα  $D$  με στοιχεία  $d_{n,n} = m(n)$ , επιτυγχάνεται η αναπαράσταση του  $T$  στη βάση Fourier ( $[T(z)]_{\mathcal{F}} = D[z]_{\mathcal{F}}$ , και αξιοποιώντας τη σχέση  $W_N z = \hat{z}$  οδηγούμαστε στη σχέση  $A = W_N^{-1} D W_N$ . Η σχέση αυτή συνιστά μια διαγωνιοποίηση του  $A$ , όπου το σημαντικότερο πόρισμα είναι πως οι ιδιοτιμές του κυκλικού πίνακα  $A$  ταυτίζονται με τις συνιστώσες του διανύσματος  $m$ , προσφέροντας έτσι μια υπολογιστικά πολύ πιο απλή μέθοδο εύρεσής τους σε σχέση με την επίλυση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

## 2 Ο Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε το βασικό πλεονέκτημα της βάσης Fourier: οι μεταθετικά αναλλοίωτοι γραμμικοί μετασχηματισμοί διαγωνοποιούνται από αυτήν. Η δεύτερη σημαντική ιδιότητα της βάσης Fourier είναι ότι ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) μπορεί να υπολογιστεί μέσω ενός εξαιρετικά γρήγορου αλγορίθμου, γνωστού ως Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform - FFT). Οι σημειώσεις του κεφαλαίου αυτού έχουν εκπονηθεί έπειτα από μελέτη του βιβλίου του M. W. Frazier [MF].

Ας εξετάσουμε το υπολογιστικό κόστος για την αλλαγή βάσης ενός τυχαίου διανύσματος  $z$ . Έστω  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  και  $\mathcal{B}$  μία βάση του  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Θεωρούμε  $A$  τον πίνακα αλλαγής βάσης από την Ευκλείδεια βάση  $\mathcal{E}$  στη βάση  $\mathcal{B}$ , δηλαδή  $Az = [z]_{\mathcal{B}}$ .

Για κάθε  $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , ο υπολογισμός του  $Az(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{m,n} z(n)$  απαιτεί  $N$  μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς.

(Σημείωση 1η: Στον υπολογισμό των πράξεων θα μετράμε μόνο τις πράξεις του πολλαπλασιασμού, καθώς για έναν υπολογιστή η πράξη της πρόσθεσης εκτελείται συγκριτικά πολύ πιο γρήγορα. Σημείωση 2η: Ένας μιγαδικός πολλαπλασιασμός απαιτεί κανονικά τέσσερις πραγματικούς πολλαπλασιασμούς, αν και με κατάλληλη τεχνική μπορεί να μειωθεί στους τρεις).

Εφόσον το διάνυσμα  $Az$  έχει  $N$  στοιχεία, απαιτούνται συνολικά  $O(N^2)$  πολλαπλασιασμοί για τον υπολογισμό του. Με τον αλγόριθμο FFT θα δούμε πόσο δραστικά μπορούμε να μειώσουμε το κόστος αυτών των πράξεων. Ξεκινάμε με την πιο απλή εκδοχή του FFT, εκεί όπου το μήκος  $N$  του διανυσματικού χώρου είναι άρτιο, η οποία αρκεί για να αναδειχθεί η βασική ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο.

**Λήμμα 2.1.** Θεωρούμε  $M \in \mathbb{N}$  και  $N = 2M$ , Έστω  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  και θεωρούμε  $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$  τέτοια ώστε:

$$u(k) = z(2k) \quad \text{για } k = 0, 1, \dots, M-1$$

και

$$v(k) = z(2k+1) \quad \text{για } k = 0, 1, \dots, M-1$$

Με άλλα λόγια,

$$u = (z(0), z(2), \dots, z(N-2))$$

και

$$v = (z(1), z(3), \dots, z(N-1))$$

Θεωρούμε  $\hat{z}$  να είναι ο DFT του  $z$  όπως ορίστηκε 1.2, και από τον τύπο (1.22) έχουμε ότι  $\hat{z} = W_N z$ , αντίστοιχα θεωρούμε και τα διανύσματα  $\hat{u}, \hat{v}$ , όπου  $\hat{u} = W_M u$  και  $\hat{v} = W_M v$ . Τότε για  $m = 0, 1, \dots, M-1$ ,

$$\hat{z}(m) = \hat{u}(m) + e^{-2\pi i m/N} \hat{v}(m). \quad (2.1)$$

Επίσης για  $m = M, M+1, \dots, N-1$ , θεωρούμε  $l = m - M$  (παρατηρούμε πάλι ότι  $l \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ ). Τότε

$$\hat{z}(m) = \hat{z}(l+M) = \hat{u}(l) - e^{-2\pi i l/N} \hat{v}(l). \quad (2.2)$$

Απόδειξη. Έστω  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Από τον τύπο (1.9) θα έχουμε για κάθε  $m = 0, 1, \dots, M-1$

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n / N} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} z(2k) e^{-2\pi i m (2k) / N} + \sum_{k=0}^{M-1} z(2k+1) e^{-2\pi i m (2k+1) / N} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i m k / (N/2)} + e^{-2\pi i m / N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i m k / (N/2)} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i m k / M} + e^{-2\pi i m / N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i m k / M} \\
&= \hat{u}(m) + e^{-2\pi i m / N} \hat{v}(m)
\end{aligned}$$

Ενώ για  $m \in \{M, M+1, \dots, N-1\}$  θέτουμε  $l = m - M$ , οπότε  $l \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ . και  $m = l + M$ :

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) &= \hat{z}(l + M) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i (l+M) n / N} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} z(2k) e^{-2\pi i (l+M) (2k) / N} + \sum_{k=0}^{M-1} z(2k+1) e^{-2\pi i (l+M) (2k+1) / N} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i (l+M) k / N} + \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i (2kl + l + 2kM + M) / N} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} e^{-2\pi i k l} u(k) e^{-2\pi i k M / N} + \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i 2kl / N - 2\pi i l / N - 2\pi i k - 2\pi i M / N} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i k l / M} - e^{-2\pi i l / N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i k l / M} \\
&= \hat{u}(l) - e^{-2\pi i l / N} \hat{v}(l)
\end{aligned}$$

□

*Παρατήρηση.* Για τον υπολογισμό του  $\hat{z}$  χρειάζεται να υπολογίσουμε τα  $\hat{u}, \hat{v}$ , τα οποία είναι διάστασης  $M = N/2$ , δηλαδή απαιτούν  $M^2$  μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς για τον υπολογισμό τους. Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε το γινόμενο  $e^{-2\pi i m / N} \hat{v}(l)$  για κάθε  $l = 0, 1, \dots, M-1$ , δηλαδή άλλους  $M$  το πλήθος μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Οι υπόλοιπες πράξεις για τον υπολογισμό του  $\hat{z}$  είναι προσθήκες και αφαιρέσεις τις οποίες (κατά σύμβαση) δεν μετράμε. Συνολικά απαιτούνται  $M^2 + M^2 + M = 2N^2/4 + N/2 = 1/2(N^2 + N)$  το πλήθος πράξεις, όπου για μεγάλα  $N$  αυτό ισοδυναμεί ουσιαστικά με  $N^2/2$  το πλήθος πράξεις. Σε σύγκριση με τον απευθείας υπολογισμό του  $\hat{z}$  του οποίου το κόστος ήταν  $N^2$ , μέσω αυτή της διαδικασίας το κόστος το κόστος πράξεων μειώθηκε στο μισό. Σε περίπτωση που το  $N$  διαιρούταν με το 4 (δηλαδή:  $N = 4M$ ), θα μπορούσε να επαναληφθεί άλλη μία φορά αυτή η διαδικασία (καθώς η διάσταση των  $\hat{u}, \hat{v}$  θα ήταν άρτια, θα μπορούσε να επαναληφθεί η διαδικασία και για αυτά), οπότε το κόστος των πράξεων θα

ήταν  $2M^2 + 2M^2 + 2M = 2(N^2/8 + N/2)$ , όπου για μεγάλα  $N$ , είναι περίπου  $N^2/4$ . Ας περιγράψουμε πιο γενιά την παραπάνω διαδικασία. Συμβολίζουμε με  $\#_N$  τον ελάχιστο αριθμό πράξεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του DFT ( $\hat{z}$ ) ενός διανύσματος  $z$  διάστασης  $N$ . Τότε για  $N = 2M$  ισχύει η ανισότητα:

$$\#_N \leq 2\#_M + M, \quad (2.3)$$

εύκολα μπορεί να καταλάβει κάποιος ότι αυτή η διαδικασία βελτιστοποιείται όταν το  $N$  η δύναμη του δύο.

**Θεώρημα 2.1.** Θεωρούμε  $N = 2^n$ , όπου  $n \in \mathbb{N}$ , έστω  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Τότε  $\#_N \leq \frac{1}{2}N \log_2 N$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο  $n$ .

### Βήμα 1<sup>ο</sup>: Βασικό βήμα

Για  $n = 1$ . Τότε το  $z$  θα είναι της μορφής  $z = (a, b)$ , όπου  $a, b \in \mathbb{C}$ . Θυμόμαστε από το παράδειγμα 1.1 ότι

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

επομένως

$$\hat{z} = W_2 z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b \\ a - b \end{bmatrix}$$

Δηλαδή ο υπολογισμός του  $\hat{z}$  απαιτεί 0 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Οπότε

$$\#_2 = 0 \leq 1 = (2/2) \log_2 2$$

### Βήμα 2<sup>ο</sup>: Επαγωγική Υπόθεση

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = k - 1$ , δηλαδή

$$\#_{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2}(2^{k-1}) \log_2 2^{k-1} = 2^{k-2}(k-1) \quad (2.4)$$

### Βήμα 3<sup>ο</sup>: Επαγωγικό Βήμα

Για  $n = k$  από τον τύπο (2.3), και την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι:

$$\#_{2^k} \leq 2\#_{2^{k-1}} + 2^{k-1} \leq 2 \cdot 2^{k-2}(k-1) + 2^{k-1} = 2^{k-1}k = \frac{1}{2}2^k \log_2 2^k$$

Το οποίο επαληθεύει την επαγωγική υπόθεση και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Συνεχίζουμε με την πιο γενική περίπτωση όπου το  $N$  είναι της μορφής  $N = pq$ , όπου  $p, q \in \mathbb{N}$ .

**Θεώρημα 2.2.** Έστω  $p, q \in \mathbb{N}$  και  $N = pq$ , έστω  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Ορίζουμε  $w_0, w_1, \dots, w_{p-1} \in \mathbb{Z}_q$  με

$$w_l(k) = z(kp + l), \quad \text{για } k \in \{0, \dots, q-1\}$$

Για  $b = 0, 1, \dots, p-1$  ορίζω  $v_b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ως εξής

$$v_b(l) = e^{-2\pi i b l / N} \hat{w}_l(b) \quad \text{για } l \in \{0, \dots, p-1\}$$

Τότε για  $a = 0, 1, \dots, p-1$  και  $b = 0, 1, \dots, q-1$ ,

$$\hat{z}(aq + b) = \hat{v}_b(a) \quad (2.5)$$

*Παρατήρηση.* Από τον αλγόριθμο της διαίρεσης, κάθε  $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  γράφεται  $m = aq + b$  για κάποιο  $a \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  και  $b \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ . Οπότε ο τύπος (2.5) καθορίζει πλήρως τον (DFT) του  $z$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Τότε από τον αλγόριθμο της διαίρεσης το  $n$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή  $kp + l$  για κάποια  $k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$  και  $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ . Από τον τύπο (1.9) έχουμε:

$$\hat{z}(m) = \hat{z}(aq + b) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i(aq+b)n/N} = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} z(kp + l) e^{-2\pi i(aq+b)(kp+l)/(pq)} \quad (2.6)$$

όμως

$$(aq + b)(kp + l)/(pq) = (aqkp + aql + kpb + bl)/pq = ak + al/p + kb/q + bl/(pq)$$

οπότε

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i(aq+b)(kp+l)/(pq)} &= e^{-2\pi iak} e^{-2\pi ial/p} e^{-2\pi ikb/q} e^{-2\pi ibl/(pq)} \\ &= e^{-2\pi ial/p} e^{-2\pi ikb/q} e^{-2\pi ibl/(pq)} \end{aligned}$$

έτσι αντικαθιστώντας στην (2.6) τις (2.2), (2.2) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{z}(aq + b) &= \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} z(kp + l) e^{-2\pi i(aq+b)(kp+l)/(pq)} \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} w_l(k) e^{-2\pi ial/p} e^{-2\pi ikb/q} e^{-2\pi ibl/(pq)} \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} e^{-2\pi ial/p} e^{-2\pi ibl/(pq)} \sum_{k=0}^{q-1} w_l(k) e^{-2\pi ikb/q} \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} e^{-2\pi ial/p} e^{-2\pi ibl/N} \hat{w}_l(b) \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} e^{-2\pi ial/p} v_b(l) \\ &= \hat{v}_b(a) \end{aligned}$$

□

Αυτή η απόδειξη δείχνει τη βασική αρχή πίσω από τον αλγόριθμο FFT, η οποία έγκειται στην αποφυγή υπολογισμού ποσοτήτων που επαναλαμβάνονται. Συγκεκριμένα κατά τον υπολογισμό του  $\hat{z}(aq + b)$  τα  $v_b(l) \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  παραμένουν ίδια για κάθε  $a$ . Ο αλγόριθμος το "αναγνωρίζει" αυτό και τα υπολογίζει μόνο μία φορά. Ένας άμεσος υπολογισμός του  $\hat{z}$  θα τα υπολόγιζε αυτά κάθε φορά.

Οι πράξεις για τον υπολογισμό του  $\hat{z}$  αξιοποιώντας τον αλγόριθμο για  $N = pq$  θα είναι:

- Κάθε  $\hat{w}_l$  απαιτεί  $\#_q$  πράξεις (μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς). Επομένως για τον υπολογισμό των  $\{\hat{w}_0, \hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{p-1}\}$  απαιτούνται  $p\#_q$  πράξεις.

- Τα  $v_b(l)$  ( $v_b(l) = e^{-2\pi i b l / N} \hat{w}_l(b)$  είναι  $q$  το πλήθος και έχουν διάσταση  $p$ ) απαιτούν  $pq$  πράξεις.
- Τα  $\hat{v}_b$  απαιτούν  $\#_p$  για κάθε  $b$ , άρα  $q\#_p$  πράξεις

Αθροίζοντας τα παραπάνω θα έχουμε:

$$\#_N = \#pq \leq p\#_q + p\#_p + pq \quad (2.7)$$

Εύκολα καταλαβαίνει κανείς ότι όσο πιο σύνθετος είναι ο αριθμός τόσο περισσότερο μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματα του αλγόριθμου. Με βέλτιστη περίπτωση το  $N$  να είναι δύναμη του 2. Καθώς μπορούμε να κάνουμε επαναλαμβανόμενη χρήση του αλγόριθμου. Σε περιπτώσεις που η διάσταση  $N$  δεν είναι υπολογιστικά βολική, τα δεδομένα μπορούν είτε να κατατμηθούν σε τμήματα κατάλληλου μεγέθους, είτε να επεκταθούν με την προσθήκη μηδενικών στο τέλος, ώστε το νέο μήκος να διευκολύνει την εφαρμογή του αλγόριθμου.

## Βιβλιογραφία

- [SA] Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4th Edition, Springer, 2024.
- [MF] Michael W. Frazier, *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*, Springer, 1999.