3. ΝΟΡΜΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

3.1 Νόρμες διανυσμάτων.

Θα μελετήσουμε την έννοια του μεγέθους ή της νόρμας (στάθμης) ενός διανύσματος (έτσι ώστε π.χ. να μπορέσουμε να ορίσουμε την απόσταση δυο διανυσμάτων σαν την νόρμα της διαφοράς τους). Γενικεύοντας λίγο θα ορίσουμε νόρμες πάνω στον διανυσματικό χώρο C^n που αποτελείται από διανύσματα $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ όπου x_i μιγαδικοί αριθμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 Μια (διανυσματική) νόρμα στον χώρο C^n είναι μια συνάρτηση που σε κάθε διάνυσμα x αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $\|x\|$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x \in C^n$ $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x=0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ για κάθε $x \in C^n$, $\lambda \in C$.

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x,y \in C^n$ ("τριγωνική" ανισότητα). @

Μερικές χρήσιμες διανυσματικές νόρμες είναι οι:

(3.1) $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ (Η λεγόμενη l_∞ ή max(imum) νόρμα)

(3.2) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (l_1 νόρμα)

(3.3) $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$ (l_2 νόρμα ή Ευκλείδια νόρμα)

ΑΣΚΗΣΗ 3.1. Η' αποδειχθούν οι ιδιότητες (i), (ii), (iii) για τις νόρμες (3.1), (3.2) και οι ιδιότητες (I), (II) για την νόρμα (3.3).@

ΑΣΚΗΣΗ 3.2. Για κάθε διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ ισχύει

$\|x-y\| \geq \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big|$ για κάθε $x,y \in C^n$. @

ΑΣΚΗΣΗ 3.3. Στον R^2 να σχεδιάσετε την επιφάνεια της "μοναδιαίας σφαίρας", δηλ. την καμπύλη $S = \{x \in R^2 : \|x\|=1\}$, για κάθε μια απ' τις τρείς νόρμες (3.1), (3.2), (3.3). @

Η απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας (iii) για την Ευκλείδια νόρμα $\|\cdot\|_2$ μπορεί να γίνει εύκολα, αν παρατηρήσουμε ότι η νόρμα $\|.\|_2$ παράγεται από εσωτερικό γινόμενο. Συγκεκριμένα, θεωρείστε το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_2$ που ορίζεται για $x,y \in C^n$ ως ο μιγαδικός αριθμός

$$(3.4) \qquad (x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\bar{y}_i,$$

(όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z). Προφανώς έχουμε

$$(3.5) \qquad \|x\|_2 = (x,x)_2^{1/2}.$$

Ισχύει βέβαια και η ανισότητα των Cauchy-Schwarz:

$$(3.6) \qquad |(x,y)_2| \leq \|x\|_2\,\|y\|_2 \quad \text{για κάθε } x,y \in C^n.$$

Για να δείξουμε την (3.6) παρατηρούμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό θ:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(\theta|x_i|+|y_i|)^2 = \theta^2 \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 + 2\theta \sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2.$$

Το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας είναι ένα τριώνυμο ως πρός θ με πραγματικούς συντελεστές που δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές. Συνεπώς η διακρίνουσα του δεν είναι ποτέ θετική (αν φυσικά $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$ τότε $x=0$ και η (3.6) προφανώς ισχύει), δηλ. έχουμε

$$(3.7) \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)$$

απ' την οποία έπεται ότι

$$|(x,y)_2| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2\,\|y\|_2$$

δηλ. η (3.6). Για την τριγωνική ανισότητα έχουμε τώρα

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)\overline{(x_i+y_i)} = (x+y,\ x+y)_2 =$$

$$= (x,x)_2 + (x,y)_2 + (y,x)_2 + (y,y)_2 = \|x\|_2^2 + (x,y)_2 + (y,x)_2 + \|y\|_2^2$$

$$= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\mathrm{Re}\{(x,y)_2\} \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2|(x,y)_2|$$

$$\leq (\text{λόγω της } (3.6)) \quad \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\,\|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.$$

Παίρνοντας τώρα τετραγωνικές ρίζες αποδεικνύουμε την (iii).

Στον χώρο C^n μέσω μιας οποιαδήποτε νόρμας $\|\cdot\|$ ορίζεται η αντίστοιχη <u>απόσταση</u> $d(x,y)$ μεταξύ δυο διανυσμάτων x,y σαν $d(x,y)=\|x-y\|$. Προφανώς μ' αυτόν τον ορισμό η $d(x,y)$ είναι πράγματι μία απόσταση στον C^n μια κι έχει τις ιδιότητες (ελέγξτε τις)

$d(x,x) = 0$ για κάθε x και $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$
$d(x,y) = d(y,x)$ για κάθε x,y
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ για κάθε x,y,z.

Άρα ο (C^n,d) είναι <u>μετρικός χώρος</u>. Φυσικά η τιμή της απόστασης $d(x,y)$ εξαρτάται από την χρησιμοποιούμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Πάντως. το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι στον C^n, αν η απόσταση δυο διανυσμάτων είναι "μικρή" ως πρός μια νόρμα θα είναι "μικρή" και ως πρός

οποιαδήποτε άλλη νόρμα.

Πρώτα-πρώτα ένας ορισμός. Δύο νόρμες $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$ λέγονται <u>ισοδύναμες</u> ή <u>συγκρίσιμες</u> αν υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε

$$(3.8) \quad c_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2\|x\|_\alpha\,, \quad \text{για κάθε } x \in C^n.$$

(Προφανώς απ' την (3.8) έπεται ότι $c_2^{-1}\|x\|_\beta < \|x\|_\alpha < c_1^{-1}\|x\|_\beta$, $x \in C^n$)

Οι σταθερές c_1 και c_2 λέγονται <u>σταθερές σύγκρισης</u> για τις νόρμες $\|.\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$. <u>Γενικά, εξαρτώνται από την διάσταση n</u> του C^n. Παραδείγματος χάριν έχουμε για τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ ότι

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,, \quad x \in C^n,$$

δηλ. ότι $c_1=1$, $c_2=n$ όταν $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_1$.

ΑΣΚΗΣΗ 3.1. Να βρεθούν σταθερές σύγκρισης για όλα τα ζευγάρια των νορμών $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. @

Ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα που προκύπτει απ' το γεγονός ότι ο C^n έχει <u>πεπερασμένη διάσταση</u> είναι το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 <u>Οποιεσδήποτε δυο</u> νόρμες στον C^n είναι ισοδύναμες. Δηλ. αν δοθούν δύο νόρμες $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$ υπάρχουν δυο θετικές σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε να ισχύει η (3.8).

• **Απόδειξη:** Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|_\beta$ είναι η ευκλείδια νόρμα $\|\cdot\|_2$. (Γιατί, αν ισχύουν οι σχέσεις $d_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_2 \leq d_2\|x\|_\alpha$ και $d_1'\|x\|_\beta \leq \|x\|_2 \leq d_2'\|x\|_\beta$, τότε ισχύει και η (3.8) με $c_1=d_1(d_2')^{-1}$, $c_2=d_2(d_1')^{-1}$). Συμβολίζοντας με e^i, $i=1,2,\ldots,n$ τα διανύσματα της κανονικής βάσης του C^n, $(e_j^i = \delta_{ij},\ 1\leq i,j\leq n)$, έχουμε για κάθε $x \in C^n$

ότι $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$, οπότε από την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα των Cauchy-Schwarz στον R^n προκύπτει

$$\|x\|_\alpha \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,\|e^i\|_\alpha \le \gamma\,\|x\|_2, \quad \gamma = \Big(\sum_{i=1}^{n} \|e^i\|_\alpha^2\Big)^{1/2}.$$

Συνεπώς η πρώτη ανισότητα της (3.8) ισχύει με $c_1=\gamma^{-1}$.
Τώρα, από την Άσκηση 3.2, έχουμε για $x,y \in C^n$

$$|\,\|x\|_\alpha - \|y\|_\alpha\,| \le \|x-y\|_\alpha \le \gamma\,\|x-y\|_2$$

Άρα η συνάρτηση $f: C^n \to R$ που ορίζεται ως $f(x)=\|x\|_\alpha$, είναι συνεχής στον C^n (μετράμε αποστάσεις στον C^n με την ευκλείδεια νόρμα). Ξέρουμε όμως ότι η μοναδιαία σφαίρα $S=\{x\in C^n : \|x\|_2=1\}$ είναι συμπαγής στον C^n (κλειστό και φραγμένο σύνολο). Άρα η $f(x)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στην S για κάποιο $y\in S$, δηλ. υπάρχει $y\in S$ τέτοιο ώστε

$$\|x\|_\alpha \ge \|y\|_\alpha = \delta > 0 \quad \text{για } x\in S$$

($\delta>0$ γιατί αν $\delta=\|y\|_\alpha=0$, τότε $y=0$, δηλ. $y\notin S$). Συνεπώς για οποιοδήποτε $0 \ne x\in C^n$, επειδή $x/\|x\|_2 \in S$, έχουμε ότι

$$\|x\|_\alpha = \|x\|_2\, \|x/\|x\|_2\|_\alpha \ge \delta\|x\|_2.$$

Άρα ισχύει και η δεύτερη ανισότητα της (3.8) με $c_2=\delta^{-1}$. Η (3.8) είναι βέβαια προφανής για $x=0$. @

Θεωρούμε μια ακολουθία διανυσμάτων $x^1, x^2, \ldots \in C^n$. Λέμε ότι η ακολουθία $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο διάνυσμα $x\in C^n$ (ή ότι έχει όριο το x) αν υπάρχει νόρμα $\|.\|$ στον C^n, τέτοια ώστε,

(3.9) $$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\| = 0.$$

Απ' το Θεώρημα 3.1 έπεται ότι η σύγκλιση μιας ακολουθίας διανυσμάτων είναι ανεξάρτητη της χρησιμοποιούμενης νόρμας. Δηλ. ότι αν $\|x^k-x\|_\alpha \to 0$, $k\to\infty$ τότε $\|x^k-x\|_\beta \to 0$. Επίσης, μια και όλες οι νόρμες στον C^n είναι συγκρίσιμες με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ και επειδή

$$\|x^k-x\|_\infty \to 0 \iff \max_{1\le i\le n} |x_i^k - x_i| \to 0 \iff x_i^k \to x_i,\ 1\le i\le n, \quad \text{δηλ.}$$

επειδή η σύγκλιση ως πρός την max νόρμα είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση όλων των συνιστωσών x_i^k στις αντίστοιχες x_i όταν $k\to\infty$, έπεται ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|_\alpha$ στον C^n.

(3.10) $$\lim_{k\to\infty} \|x^k-x\|_\alpha = 0 \text{ αν και μόνον αν } \lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i,\ 1\le i\le n.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.5. Αν όταν $k\to\infty$ $x^k\to x$, $y^k\to y$ $(x^k,y^k,x,y\in C^n)$, τότε, $\lambda x^k \to \lambda x$ για $\lambda\in C$, $x^k+y^k \to x+y$, $\|x^k\| \to \|x\|$. @

3.2 Νόρμες πινάκων

Κάθε πίνακας A με μιγαδικά στοιχεία a_{ij}, $1\le i$, $j\le n$ μπορεί, με μια οποιαδήποτε διάταξη των στοιχείων του, πάντα να θεωρηθεί σαν διάνυσμα στον χώρο C^{n^2}. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε νόρμες πινάκων θεωρώντας τους σαν διανύσματα του C^{n^2}. Επειδή όμως θέλουμε οι νόρμες τους να έχουν μια ορισμένη ιδιότητα (βλ. (iv) παρακάτω) που σχετίζεται με το γινόμενο δύο πινάκων, ορίζουμε τις <u>νόρμες πινάκων</u> ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2 Μια νόρμα πινάκων, ορισμένη για nxn μιγαδικούς πίνακες A, B,..., είναι μια πραγματική συνάρτηση του A, που συμβολίζεται με $\|A\|$, με τις ιδιότητες:

(i) $\|A\|\ge 0$ και $\|A\| = 0 \Rightarrow A=0$,
(ii) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$, $\lambda\in C$,
(iii) $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$,
(iv) $\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$. @

ΑΣΚΗΣΗ 3.6 Αν θεωρήσουμε τους πίνακες A με n^2 μιγαδικά στοιχεία a_{ij} ως διανύσματα του διανυσματικού χώρου C^{n^2}, τότε τ' ανάλογα των νορμών $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ είναι οι "νόρμες" πινάκων

(α) $\|A\|_{MAX} = \max_{i,j} |a_{ij}|$,

(β) $\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

Προφανώς και οι δυο αυτές νόρμες ικανοποιούν τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) του Ορ. 3.2 (γιατί;) Δείξτε ότι η (α) <u>δεν</u> ικανοποιεί την (iv)-ένα αντιπαράδειγμα φτάνει-ενώ η (β) την ικανοποιεί. Συμπέρασμα: <u>Ορισμένες</u> μόνο διανυσματικές νόρμες του C^{n^2} ικανοποιούν την ιδιότητα (iv). @

Μια μεγάλη και χρήσιμη κατηγορία νορμών πινάκων είναι οι λεγόμενες <u>φυσικές</u> νόρμες (ή νόρμες <u>τελεστών</u>). Αυτές <u>παράγονται</u> από διανυσματικές νόρμες του C^n ως εξής: Δίνεται μια διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ και ένας nxn πίνακας A. Για $x\in C^n$, $x\neq 0$ θεωρούμε τον αριθμό $\|Ax\|/\|x\|$. Το σύνολο αυτών των θετικών αριθμών για $x\neq 0$ είναι <u>φραγμένο</u>: Πραγματικά, παρατηρούμε πρώτα ότι η δοσμένη νόρμα $\|\cdot\|$ είναι (από το Θεώρημα 3.1) ισοδύναμη με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Δηλ. υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 ώστε:

$$c_1\|y\|_\infty \le \|y\| \le c_2\|y\|_\infty \quad \text{για κάθε } y\in C^n$$

Συνεπώς, έχουμε, για κάθε $x\in C^n$, $x\neq 0$:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \frac{c_2\|Ax\|_\infty}{c_1\|x\|_\infty} = \frac{c_2(\max_i|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|)}{c_1(\max_j|x_j|)} \le \frac{c_2(\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)(\max_j|x_j|)}{c_1(\max_j|x_j|)}$$

$$= c_2\cdot\max_i\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)/c_1 = M < \infty .$$

Άρα $\sup_{0\neq x\in C^n} (\|Ax\|/\|x\|) \le M < \infty$. Μ' αυτήν την παρατήρηση προχωρούμε στο εξής

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 Για κάθε διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ του C^n και κάθε nxn μιγαδικό πίνακα A ορίζουμε την λεγόμενη <u>φυσική νόρμα</u> του A (που παράγεται από την διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$) σαν τον αριθμό

$$(3.10)\quad \|A\| = \sup_{0\neq x\in C^n} (\|Ax\|/\|x\|).$$

Ο τύπος (3.10) ορίζει μια <u>νόρμα πινάκων</u>. Δηλ. η νόρμα $\|A\|$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i)-(iv) του ορισμού 3.2.

Απόδειξη: Προφανώς $\|A\| \ge 0$. Αν $\|A\| = 0$ τότε $\|Ax\| = 0$ για κάθε $x \in C^n$ <=> $Ax = 0$ για κάθε $x \in C^n$ <=> $A = 0$. Η ιδιότητα (ii) του ορισμού 3.2 έπεται αμέσως από την (ii) του ορισμού 3.1 για διανυσματικές νόρμες και απ' την γραμμικότητα του A. Για να αποδείξουμε την (iii) παρατηρούμε ότι για $x \neq 0$

$$\|(A+B)x\|/\|x\| = \|Ax+Bx\|/\|x\| \le \|Ax\|/\|x\| + \|Bx\|/\|x\| \le \|A\| + \|B\| .$$

Συνεπώς,

$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} (\|(A+B)x\|/\|x\|) \le \|A\| + \|B\|.$$

Για ν' αποδείξουμε την (iv) παρατηρούμε ξανά ότι βασική συνέπεια του ορισμού (3.10) είναι η σχέση

(3.11) $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$, για κάθε $x \in C^n$.

Συνεπώς, για κάθε $x \in C^n$, $x \neq 0$ έχουμε ότι

$$\|(AB)x\|/\|x\| = \|A(Bx)\|/\|x\| \le \|A\|\,\|Bx\|/\|x\| \le \|A\|\,\|B\|\,\|x\|/\|x\| = \|A\|\,\|B\|.$$

Συνεπώς

$$\|AB\| = \sup_{x\neq 0} \|(AB)x\|/\|x\| \le \|A\|\,\|B\| . \ @$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.7 Ν' αποδειχθεί ότι στον τύπο (3.10) το $\sup_{x\neq 0}$ μπορεί να αντικατασταθεί από το supremum πάνω σε ορισμένα υποσύνολα του C^n. Συγκεκριμένα να δειχθεί ότι

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in C^n \\ x\neq 0}} \|Ax\|/\|x\| = \sup_{\substack{x\in C^n \\ \|x\|\le 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x\in C^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|. \ @$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.8 Για κάθε φυσική νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ να δειχθεί ότι $\|I\|=1$, όπου I είναι $n\mathrm{x}n$ μοναδιαίος πίνακας. Σαν συνέπεια αυτής της παρατήρησης δείξτε ότι η νόρμα πινάκων που δίνεται απ' τον τύπο:

(3.12) $\|A\|_E = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{1/2}$

δεν είναι φυσική νόρμα, δηλ. ότι δεν υπάρχει διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|A\|_E = \sup_{x\neq 0} \|Ax\|/\|x\|$. @

ΑΣΚΗΣΗ 3.9 Από την παραπάνω άσκηση βλέπουμε ότι η νόρμα πινάκων $\|A\|_E$ δεν είναι φυσική. Πάντως δείξτε ότι ικανοποιεί την σχέση

$\|Ax\|_2 \le \|A\|_E\,\|x\|_2$, για κάθε $x \in C^n$,

δηλ. όπως λέμε, είναι συμβιβαστή με την Ευκλείδιο (διανυσματική) νόρμα $\|\cdot\|_2$ @

Χρησιμοποιούμε συχνά τις φυσικές νόρμες πινάκων που προκύπτουν από τις διανυσματικές νόρμες $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Είναι λοιπόν χρήσιμο να βρούμε συγκεκριμένους τύπους γι αυτές τις νόρμες σαν συναρτήσεις του A, από τους οποίους να τις υπολογίζουμε.

(α) $\|A\|_\infty$

Έχουμε για $x \in C^n$ ότι

$$\|Ax\|_\infty = \max_i |\sum_j a_{ij}x_j| \le \max_i(\sum_j |a_{ij}|\,|x_j|) \le \max_i(\sum_j |a_{ij}|).\|x\|_\infty .$$

Άρα:

(3.13) $\|A\|_\infty \le \max_i (\sum_j |a_{ij}|)$.

Έστω k, $1\le k\le n$, ο δείκτης μιάς γραμμής για την οποία το άθροισμα $\sum_j |a_{ij}|$ είναι μέγιστο· δηλ. για το k: $\sum_j |a_{kj}| = \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$.

Ορίζουμε το διάνυσμα y ως $y_j = \bar{a}_{kj}/|a_{kj}|$ αν $a_{kj} \neq 0$ και $y_j=0$ άν $a_{kj}=0$. Προφανώς (αν $A\neq 0$) $\|y\|_\infty = 1$ και

$\|Ay\|_\infty = \max_i |\sum_j a_{ij}y_j| \geq |\sum_j a_{kj}y_j| = \sum_j |a_{kj}| = \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$

Αλλά $\|A\|_\infty \|y\|_\infty \geq \|Ay\|_\infty$ δηλ. $\|A\|_\infty \geq \|Ay\|_\infty$.

Συνεπώς

(3.14) $\|A\|_\infty \geq \max_i (\sum_j |a_{ij}|)$,

Άρα από τις (3.13), (3,14) προκύπτει ότι:

(3.15) $\|A\|_\infty = \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$,

δηλ. ότι η νόρμα $\|A\|_\infty$ είναι το μέγιστο άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων γραμμών του A @

(β) $\|A\|_1$.

Για $x \in C^n$ έχουμε ότι

$\|Ax\|_1 = \sum_i |\sum_j a_{ij}x_j| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x_j| = \sum_j (|x_j| \sum_i |a_{ij}|) \leq$

$\leq \max_j(\sum_i |a_{ij}|) \|x\|_1$.

Άρα

(3.16) $\|A\|_1 \leq \max_j (\sum_i |a_{ij}|)$.

Τώρα έστω k ο δείκτης μιάς στήλης του A για την οποία $\sum_i |a_{ik}| = \max_j (\sum_i |a_{ij}|)$. Ορίζουμε το διάνυσμα y έτσι ώστε $y_k=1$, $y_j=0$, $j \neq k$. Προφανώς $\|y\|_1=1$. Επίσης $\|Ay\|_1 = \sum_i |\sum_j a_{ij}y_j| = \sum_i |a_{ik}| = \max_j (\sum_i |a_{ij}|)$. Αλλά $\|A\|_1 \|y\|_1 \geq \|Ay\|_1$. Άρα

(3.17) $\|A\|_1 \geq \max_j(\sum_i |a_{ij}|)$.

Από τις (3.16) και (3.17) έχουμε ότι

(3.18) $\|A\|_1 = \max_j (\sum_i |a_{ij}|)$,

δηλ. ότι η $\|A\|_1$ δίνεται από το μέγιστο άθροισμα των απολύτων τιμών των στοιχείων στηλών του A. @

(γ) $\|A\|_2$

Ερχόμαστε τώρα στον υπολογισμό του $\|A\|_2$, δηλ. της φυσικής νόρμας που παράγεται από την ευκλείδιο διανυσματική νόρμα $\|x\|_2 = (\sum_j |x_j|^2)^{1/2}$. (Δεν ισχύει $\|A\|_2 = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2}$ (!)).

Θυμόμαστε ότι $\|x\|_2^2 = (x,x)_2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$, δηλ. ότι η νόρμα $\|.\|_2$ προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_2$. Συνεπώς για κάθε $x \in C^n$, $\neq 0$ έχουμε

(3.19) $\|Ax\|_2^2/\|x\|_2^2 = (Ax,Ax)_2/(x,x)_2$.

Απ' τη Γραμμική Άλγεβρα θυμόμαστε ότι ένας ερμιτιανός πίνακας B (δηλ. ένας πίνακας τέτοιος ώστε $B=B^*$ όπου $(B^*)_{ij} = \bar{B}_{ji}$. Οι ερμιτιανοί πίνακες λέγονται και αυτοσυζυγείς) έχει πάντα πραγματικές ιδιοτιμές στις οποίες αντιστοιχεί μια ορθομοναδιαία (ως πρός το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_2$) βάση ιδιοδιανυσμάτων. Δηλ. αν $B=B^*$, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ_i $1 \leq i \leq n$ και διανύσματα u^i $1 \leq i \leq n$, που αποτελούν μια βάση του C^n, τέτοια ώστε

$Bu^i = \lambda_i u^i$, $1 \leq i \leq n$, $(u^i,u^j)_2 = \delta_{ij}$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο πίνακας A^*A είναι ερμιτιανός. Έστω λ_i, u^i, $1\le i\le n$ το σύστημα των ιδιοτιμών και των ορθομοναδιαίων ιδιοδιανυσμάτων του A^*A. Επειδή τα u^i αποτελούν βάση του C^n έχουμε ότι για $x\in C^n$

$x = \sum_{i=1}^{n} c_i u^i$. Συνεπώς

$$(x,x)_2 = (\sum_i c_i u^i, \sum_j c_j u^j)_2 = \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j (u^i,u^j)_2 = \sum_i |c_i|^2$$

και

$$(Ax,Ax)_2 = (A^*Ax,x)_2 = (\sum_i \lambda_i c_i u^i, \sum_j c_j u^j)_2 = \sum_i \lambda_i |c_i|^2.$$

(Σημειώστε ότι οι ιδιοτιμές λ_i του A^*A είναι όλες μη αρνητικές γιατί

$\lambda_i = (A^*Au^i,u^i)_2 = (Au^i,Au^i)_2 \ge 0$.)

Απ' τα παραπάνω έχουμε για κάθε $x\ne 0$

$$(3.20)\quad (Ax,Ax)_2/(x,x)_2 = \sum_i \lambda_i |c_i|^2 / \sum_i |c_i|^2 \le \max_i \lambda_i$$

και συνεπώς, από τις (3.19) και (3.20) ότι

$$(3.21)\quad \|A\|_2^2 = \sup_{x\ne 0} (\|Ax\|_2^2 / \|x\|_2^2) \le \max_i \lambda_i .$$

Απ' την άλλη μεριά, αν $\lambda_s = \max_i \lambda_i$, τότε

$$\|Au^s\|_2^2 = (Au^s, Au^s)_2 = (A^*Au^s, u^s)_2 = \lambda_s (u^s,u^s)_2 = \lambda_s .$$

Άρα, επειδή $\|u^s\|_2 = 1$, $\|A\|_2^2 \|u^s\|_2^2 \ge \|Au^s\|_2^2 = \lambda_s$, δηλ.

$$(3.22)\quad \|A\|_2^2 \ge \max_i \lambda_i .$$

Από τις (3.21) και (3.22) προκύπτει ότι

$$(3.23)\quad \|A\|_2 = \max_{1\le i\le n} (\lambda_i)^{1/2} ,$$

όπου λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα A^*A.

Για ένα οποιοδήποτε $n\times n$ πίνακα B η ποσότητα $\max_i |\mu_i|$, όπου μ_i οι ιδιοτιμές του B, λέγεται <u>φασματική ακτίνα</u> του B και παριστάνεται με $\rho(B)$, δηλ. συμβολίζουμε

$$(3.24)\quad \rho(B) = \max_{1\le i\le n} |\mu_i|, \quad \mu_i \text{ οι ιδιοτιμές του } B.$$

Βάσει αυτών, η (3.23) συνήθως γράφεται:

$$(3.25)\quad \|A\|_2 = [\rho(A^*A)]^{1/2}.$$

Γιαυτό το λόγο η νόρμα $\|A\|_2$ λέγεται και <u>φασματική νόρμα</u>.

Για ένα <u>ερμιτιανό</u> (αυτοσυζυγή) πίνακα A έχουμε:

ΑΣΚΗΣΗ 3.10 Αν ο A είναι ερμιτιανός (αυτοσυζυγής), δηλ. αν $A=A^*$ (αν A πραγματικός υποθέτουμε μόνο ότι $A=A^T$), τότε

$$(3.26)\quad \|A\|_2 = \rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|,$$

όπου $\lambda_i(A)$ οι ιδιοτιμές του A. @

ΑΣΚΗΣΗ 3.11 Βρήτε τις νόρμες $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ και $\|A\|_E$ για τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & +1 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \text{ @}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.12 Αν ο $n\times n$ πίνακας U ικανοποιεί την σχέση $UU^* = U^*U = I$, τότε $\|U^*AU\|_2 = \|A\|_2$ για κάθε $n\times n$ πίνακα A. @

Επειδή κάθε νόρμα πινάκων δεν παύει να είναι και διανυσματική νόρμα στο χώρο C^{n^2} το θεώρημα 3.2 ισχύει και για νόρμες πινάκων: δηλ. για κάθε ζευγάρι νορμών πινάκων $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$ υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε για κάθε nxn πίνακα A

(3.27) $c_1\|A\|_\alpha \le \|A\|_\beta \le c_2\|A\|_\alpha$.

Μ'άλλα λόγια, δυο οποιεσδήποτε νόρμες πινάκων είναι <u>ισοδύναμες</u> (ή συγκρίσιμες). Μια (δύσκολη λίγο ν' αποδειχθεί) τέτοια ανισότητα είναι π.χ. η

(3.28) $\|A\|_2 \le \|A\|_E \le n^{1/2}\|A\|_2$.

ΑΣΚΗΣΗ 3.13 Ν' αποδειχθεί η (3.28). Επίσης να βρεθούν σταθερές σύγκρισης για τα ζευγάρια νορμών από τις $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty, \|A\|_E$. @

Λέμε ότι μια ακολουθία nxn πινάκων $A_1, A_2, \ldots$ <u>συγκλίνει</u> στον πίνακα A (γράφουμε $\lim_{k\to\infty} A_k = A$) αν υπάρχει νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$, τέτοια ώστε

(3.29) $\lim_{k\to\infty}\|A_k - A\| = 0$

(Επειδή όλες οι νόρμες πινάκων είναι ισοδύναμες, αν η (3.29) ισχύει για κάποια νόρμα θα ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη νόρμα πινάκων).

ΑΣΚΗΣΗ 3.14 Ν' αποδειχθεί ότι μια ακολουθία nxn πινάκων A_k, $k=1,2,3\ldots$ συγκλίνει σ' ένα πίνακα A αν, και μόνο αν, οι ακολουθίες των στοιχείων των A_k συγκλίνουν στα αντίστοιχα στοιχεία του A, δηλ. αν και μόνο αν

$$\lim_{k\to\infty}(A_k)_{ij} = A_{ij}, \quad 1\le i,\ j\le n.$$

Υπάρχουν ορισμένες χρήσιμες σχέσεις μεταξύ της νόρμας $\|A\|$

οποιουδήποτε πίνακα και της φασματικής ακτίνας $\rho(A) = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i(A)|$ του πίνακα. Πρώτα-πρώτα εύκολα βλέπουμε ότι για οποιοδήποτε nxn πίνακα και για οποιαδήποτε <u>φυσική</u> νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ ισχύει ότι

(3.30) $\rho(A) \le \|A\|$.

Η (3.30) αποδεικνύεται ως εξής. Έστω λ μια οποιαδήποτε ιδιοτιμή του A και έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, δηλ. έστω $Au = \lambda u$, $u\neq 0$. Συνεπώς έχουμε ότι $\|Au\| = \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$. Άρα $|\lambda| = \|Au\|/\|u\|$ δηλ.

$$|\lambda| \le \sup_{0\neq x\in C^n}\|Ax\|/\|x\| = \|A\|.$$

δηλ. κάθε απόλυτη τιμή ιδιοτιμής, και συνεπώς και η $\rho(A)$, φράσσεται από πάνω από την $\|A\|$. Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η (3.30) ισχύει για οποιαδήποτε νόρμα πινάκων (δηλ. όχι κατ' ανάγκην φυσική). Επίσης σχεδόν υπάρχει με κάποια έννοια, και μια "αντίστροφη" ανισότητα. Συνοψίζουμε, χωρίς απόδειξη, με το

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3 Έστω A ένας οποιοσδήποτε nxn μιγαδικός πίνακας και έστω $\rho(A)$ η φασματική ακτίνα του (δηλ., έστω $\rho(A)=\max_i|\lambda_i(A)|$). Τότε, για κάθε νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$, ισχύει ότι

(3.31) $\rho(A) \le \|A\|$.

Αντίστροφα, για κάθε $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε νόρμα πινάκων $|||\cdot|||$ (και μάλιστα φυσική) τέτοια ώστε

(3.32) $|||A||| \le \rho(A) + \varepsilon$. @

Στη συνέχεια θα έχουμε την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες της επόμενης πρότασης:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1 Θεωρούμε ένα nxn μιγαδικό πίνακα A και μια φυσική νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$. Αν $\|A\|<1$ τότε ο πίνακας $I-A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

(3.33) $(1+\|A\|)^{-1} \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq (1-\|A\|)^{-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από την εξίσωση $\|A\|<1$ και το γεγονός ότι $\rho(A)\leq\|A\|$ έπεται ότι για κάθε ιδιοτιμή λ_i του A ισχύει ότι $|\lambda_i|<1$. Μ' άλλα λόγια για κάθε ιδιοτιμή έχουμε ότι $\lambda_i \neq 1$. Συνεπώς ο πίνακας I-A είναι αντιστρέψιμος γιατί, αν δεν ήταν, θα υπήρχε τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση $u \neq 0$ του συστήματος $(I-A)u = 0 \Leftrightarrow Au=1.u$ με $u \neq 0$, δηλ. ο A θα έχει μια ιδιοτιμή ίση με 1, άτοπο. Επίσης, επειδή η $\|\cdot\|$ είναι φυσική νόρμα, έχουμε ότι $\|I\| = 1$ (Άσκηση 3.8). Άρα επειδή υπάρχει ο $(I-A)^{-1}$ έχουμε:

$$1 = \|I\| = \|(I-A)^{-1}(I-A)\| \leq \|(I-A)^{-1}\| \, \|I-A\| \leq$$
$$\leq \|(I-A)^{-1}\| \, (\|I\| + \|A\|) = \|(I-A)^{-1}\| \, (1+\|A\|).$$

Άρα $(1+\|A\|)^{-1} \leq \|(I-A)^{-1}\|$. (αριστερή ανισότητα της (3.33)).

Απ' την άλλη μεριά, επειδή $(I-A)^{-1}(I-A)=I$ έχουμε
$(I-A)^{-1} - A(I-A)^{-1} = I$ δηλ. $(I-A)^{-1} = I + A(I-A)^{-1}$.
Άρα $\|(I-A)^{-1}\| = \|I + A(I-A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A(I-A)^{-1}\|$
$\leq 1 + \|A\| \, \|(I-A)^{-1}\|$. Συνεπώς $(1- \|A\|) \, \|(I-A)^{-1}\| \leq 1$ και επειδή $\|A\|<1$ έπεται ότι $\|(I-A)^{-1}\| \leq (1-\|A\|)^{-1}$ (δεξιά ανισότητα της (3.33)).@

4. ΔΕΙΚΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΙΝΑΚΑ

4.1 Δείκτης κατάστασης και ευστάθεια συστημάτων

Με τα εργαλεία του προηγούμενου κεφαλαίου ξαναγυρίζουμε στο πρόβλημα της ευστάθειας γραμμικών συστημάτων και αλγορίθμων για τη λύση τους που θίξαμε στην παρ. 2.5. Εκεί είχαμε ορίσει άτυπα την ευστάθεια (ενός προβλήματος ή ενός αλγορίθμου) σαν την ιδιότητα βάσει της οποίας "μικρά" σφάλματα (στα δεδομένα, στους υπολογισμούς) προκαλούν "μικρή" μεταβολή στο τελικό αποτέλεσμα. Θα δούμε ότι καθοριστικό ρόλο στην ευστάθεια τόσο του συστήματος $Ax=b$ όσο και στην ευστάθεια του αλγορίθμου της απαλοιφής του Gauss για την λύση του παίζει ο λεγόμενος <u>δείκτης κατάστασης</u> του πίνακα.

Αρχίζουμε από το εξής απλό παράδειγμα. Έστω x η λύση του συστήματος

(4.1) $Ax = b$,

όπου A είναι ένας nxn <u>αντιστρέψιμος</u> πίνακας και b ένα nx1 διάνυσμα. Αν μεταβάλουμε σε $b+\delta b$ το δεύτερο μέλος της (4.1), πόσο θα μεταβληθεί η λύση; Έστω $x+\delta x$ η λύση του νέου συστήματος

(4.2) $A(x+\delta x) = b+\delta b$.

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι $A\delta x=\delta b$ ή

(4.3) $\delta x = A^{-1}\delta b$.

Έστω τώρα $\|\cdot\|$ μια διανυσματική νόρμα και η αντίστοιχη φυσική νόρμα πινάκων που παράγεται από αυτήν. Η (4.3) δίνει ότι

(4.4) $\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta b\|$.

Αν υποθέσουμε ότι $b\neq 0$ τότε $x\neq 0$ και συνεπώς $\|\delta x\|/\|x\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta b\|/\|x\|$. Αλλά, από την (4.1), $\|A\| \, \|x\| \geq \|b\|$. Συνεπώς

(4.5) $\|\delta x\|/\|x\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \, (\|\delta b\|/\|b\|)$.