Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων & Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Αριθμων
Ν.Γ. Τζανάκης
Εξεταστική Περίοδος Σεπτεμβρίου 2016 : 9/9/2016

Σειραϊκός Αριθμός : **349**

Όνομα, Α.Μ:

Θέμα 1: Να υπολογίσετε όλους τους **θετικούς** ακεραίους $x \leq 7^3$, που επαληθεύουν την ισοτιμία $x^2 \equiv 15 \pmod{7^3}$. Προσοχή! **Δεν είναι δεκτές απαντήσεις**, στις οποίες, ισοτιμίες $\bmod 7^2$ ή $\bmod 7^3$, θα λυθούν με δοκιμές. μον. 1

Θέμα 2: Να υπολογίσετε το σύμβολο του Legendre $\left(\frac{-662}{1187}\right)$ (ο 1187 είναι πρώτος). μον. 1

Θέμα 3: Ο ακέραιος a ανήκει στο διάστημα [800, 900]. Διαιρούμενος δια 5,8 και 17, αφήνει υπόλοιπα 4,5 και 2, αντιστοίχως. Ποιος είναι ο a; Η λύση σας πρέπει να δοθεί βάσει της σχετικής θεωρίας και **όχι με αυτοσχεδιασμούς**. μον. 1

Θέμα 4: Έστω $m = 5500$ και $a \in \mathbb{Z}$ πρώτος προς τον m. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $a^{100} - 1$ είναι διαιρετός διά m. μον. 1

Θέμα 5: (α′) Παρατηρήστε ότι, για κάθε περιττό πρώτο $p \neq 5$ ισχύει $p \equiv 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 \pmod{20}$ και άποδείξτε, **αιτιολογώντας κάθε βήμα σας**, ότι $\left(\frac{-5}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv 1$ ή 3 ή 7 ή 9 $\pmod{20}$. μον. 0.5
(β′) Έστω ακέραιος $m = a^2 + 5b^2$, με τους a, b μη μηδενικούς ακεραίους πρώτους μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι, κάθε περιττός πρώτος $p \neq 5$ που διαιρεί τον m, είναι πρώτος προς τους a, b και, ύστερα, χρησιμοποιώντας το (α′), αποδείξτε ότι $p \equiv$ 1 ή 3 ή 7 ή 9 $\pmod{20}$. μον. 1.5

Θέμα 6: (α′) Έστω ακέραιος $m \geq 2$. Τί σημαίνει ότι ένας ακέραιος g είναι γεννήτορας $\bmod m$; Αν ο g είναι γεννήτορας $\bmod m$, τότε, για ποιους ακεραίους a ορίζεται ο διακριτός λογάριθμος του a ως προς βάση g (αυτός που συμβολίζομε $\mathrm{ind}_g(a)$) και πώς ορίζεται αυτός; Ποιας μορφής είναι οι ακέραιοι m για τους οποίους υπάρχει γεννήτορας $\bmod m$; μον. 1
(β′) Στον παρακάτω πίνακα δίδεται ο διακριτός λογάριθμος $\mathrm{ind}a \pmod{50}$ για κάθε a, για το οποίο ορίζεται ο διακριτός λογάριθμος $\bmod 50$. (Ο γεννήτορας, ως προς τον οποίο έχει υπολογισθεί ο διακριτός λογάριθμος, δεν σας χρειάζεται.)

a	1	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
ind$a$	0	1	15	2	8	17	19	14	16	13	3	6	4	9	7	18	12	5	11	10

Εξηγήστε πώς, χρησιμοποιώντας αυτόν τον πίνακα, μπορείτε να υπολογίστε όλες τις λύσεις της διωνυμικής ισοτιμίας $x^{15} \equiv 43 \pmod{50}$. Υπολογίστε όλες τις διαφορετικές λύσεις, **όχι με δοκιμές!** μον. 1

Θέμα 7: (α′) Αν οι x, y είναι ακέραιοι και $x^2 - y^2 = 85$, αποδείξτε ότι $\mathrm{MK\Delta}(x, y) = 1$ και, από τους x, y, ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι $\mathrm{MK\Delta}(x + y, x - y) = 1$. μον. 1
(β′) Με τη βοήθεια του (α′) βρείτε όλες τις **θετικές** ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x^2 - y^2 = 85$. (Προσοχή! Το να βρείτε ‘‘πειραματικά’’ μία ή περισσότερες λύσεις, **δεν βαθμολογείται.**) μον. 1

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες, με κλειστές σημειώσεις. Οι συνολικές μονάδες είναι 10, με άριστα το 10 και βάση το 5. Καλή επιτυχία!