Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Ἐξεταστικὴ περίοδος Σεπτεμβρίου 2015

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

28 Αὐγούστου 2015

1. Ἔστω $\mathcal{B}$ ἡ στάνταρ βάση τοῦ $\mathbb{R}^2$ καὶ $\mathcal{B}'$ ἡ βάση $\{(1,1), (-1,2)\}$.
(α′) Ποιὸς εἶναι ὁ πίνακας μεταφορᾶς P ἀπὸ τὴ βάση $\mathcal{B}'$ στὴ βάση $\mathcal{B}$; Ἂν ἕνα διάνυσμα ἔχει συντεταγμένες (a,b) ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}'$, ποιὲς εἶναι οἱ συντεταγμένες του ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$; μον. 0.5
(β′) Ἔστω ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, ποὺ ὁρίζεται: $f(x,y) = (3x+7y, 2x+5y)$. Ὑπολογῖστε τοὺς πίνακες $A_{f/\mathcal{B}}, A_{f/\mathcal{B}'}$. Ποιὰ σχέση συνδέει τοὺς $A_{f/\mathcal{B}}, A_{f/\mathcal{B}'}$ καὶ P; μον. 1

2. Ἔστω ὁ πραγματικὸς πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
(α′) Ποιὰ τετραγωνικὴ μορφὴ $q(x,y)$ ἔχει πίνακα τὸν A; μον. 0.5
(β′) Ὑπολογῖστε πίνακες, διαγώνιο D καὶ ἀντιστρέψιμο P, τέτοιους ὥστε $PDP^{\mathrm{T}} = A$. μον. 1
(γ′) Ὑπολογῖστε τὴ γραμμικὴ ἀλλαγὴ μεταβλητῶν $x = L_1(X,Y)$, $y = L_2(X,Y)$, ἡ ὁποία μετατρέπει τὴν $q(x,y)$ σὲ διαγώνιο μορφή, δηλαδή, σὲ τετραγωνικὴ μορφὴ τοῦ τύπου $Q(X,Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$. Στὴ συγκεκριμένη περίπτωση, ὑπολογῖστε τὴν $Q(X,Y)$. μον. 1

3. Ἔστω V ὁ διανυσματικὸς χῶρος τῶν πραγματικῶν πινάκων τῆς μορφῆς
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$
(ὁ V εἶναι ὑπόχωρος τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τῶν 2×2 πραγματικῶν πινάκων).
(α′) Ἂν
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ εἶναι βάση τοῦ V. μον. 0.5
(β′) Ἔστω ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V,V)$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$ εἶναι
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Ὑπολογῖστε τὸν "τῦπο" τῆς f. Δηλαδή, ποιὸς πίνακας εἶναι ὁ $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$; μον. 1

4. Σ' αὐτὴ τὴν ἄσκηση τὰ διανύσματα τοῦ $\mathbb{R}^n$ θὰ τὰ θεωροῦμε ὡς $n\times 1$ στῆλες. Παρατηρῆστε ὅτι, γιὰ ὅλα τὰ διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ τοῦ $\mathbb{R}^n$ (ἄρα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω σύμβαση), ἡ διάσταση τοῦ πίνακα $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} M \mathbf{x}$ εἶναι 1×1, ἄρα αὐτὸς ὁ πίνακας εἶναι ἁπλῶς ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.
   (α′) Ἔστω $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικὸς πίνακας, τέτοιος ὥστε, γιὰ κάθε μὴ μηδενικὸ $\mathbf{x} \in R^n$ νὰ ἰσχύει $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} M \mathbf{x} > 0$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ὁρίσομε $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} M \mathbf{x}$, τότε ἡ συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ὁρίζει ἕνα ἐσωτερικὸ γινόμενο γιὰ τὸν $\mathbb{R}^n$. μον. 0.5
   (β′) Βασισμένοι στὸ (α′), δεῖξτε ὅτι ὁ πίνακας $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ ὁρίζει ἕνα ἐσωτερικὸ γινόμενο στὸν $\mathbb{R}^2$. Ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ ἐσωτερικὸ γινόμενο, ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; Περιγρᾶψτε τὸν ὑπόχωρο τοῦ $\mathbb{R}^2$, ποὺ εἶναι κάθετος (ὡς πρὸς τὸ ἀνωτέρω ἐσωτερικὸ γινόμενο) στὸ διάνυσμα $\mathbf{v}$. μον. 1

5. Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι $\mathbb{C}$-διανυσματικὸς χῶρος πεπερασμένης διάστασης, μὲ ἐσωτερικὸ γινόμενο, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, f^* ὁ συζυγὴς (ἢ δυϊκὸς) τελεστὴς τοῦ f καὶ λ ἰδιοτιμὴ τοῦ $f^* f$ καὶ $v \in V$ μὴ μηδενικὸ ἰδιοδιάνυσμα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ. Ἐκφρᾶστε τὸ $\|f(v)\|^2$ συναρτήσει τῶν $\|v\|$ καὶ λ καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἰδιοτιμὴ λ εἶναι πραγματικὸς μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός. μον. 1

6. Ἔστω διανυσματικὸς χῶρος V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ μηδενοδύναμος τελεστὴς δείκτη q, $V' = f(V)$ καὶ $g = f|_V$. Δεῖξτε ὅτι $g \in \mathcal{L}(V', V')$ (Προσοχή! Πρέπει νὰ δείξετε ὅτι ἡ εἰκόνα τοῦ V' μέσῳ τῆς g, περιέχεται στὸν V'.) καὶ ὁ g εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη $q - 1$. μον. 1

7. Δίδεται πίνακας $A \in \mathbb{C}^{10\times 10}$, ὁ ὁποῖος ἔχει μία μόνο ἰδιοτιμή, ἔστω λ. Γιὰ $k = 1, 2, 3, 4$, ἔστω U_k κλιμακωτὸς πίνακας τοῦ $(A - \lambda I)^k$ (I εἶναι ὁ 10×10 ταυτοτικὸς πίνακας). Δίδεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μηδενικῶν γραμμῶν τοῦ U_k εἶναι 4 ὅταν $k = 1$, 7 ὅταν $k = 2$, 9 ὅταν $k = 3$ καὶ 10 ὅταν $k = 4$ (δηλαδή, ὁ U_{10} εἶναι ὁ μηδενικὸς 10×10 πίνακας). Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα Jordan τοῦ πίνακα A συναρτήσει τοῦ λ. μον. 1

Καλὴ ἐπιτυχία!