Γραμμικη Αλγεβρα II

Ἐμβόλιμη Ἐξεταστικὴ περίοδος Ἰουνίου 2015

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

1. Δίδονται οἱ βάσεις τοῦ $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B} = \{(1,1),(2,1)\}$ καὶ $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(0,1)\}$.
(α′) Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα P μετάβασης ἀπὸ τὴν $\mathcal{B}'$ στὴ $\mathcal{B}$. μον. 0.5
(β′) Ἔστω ἡ γραμμικὴ ἀπεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση $f(x,y) = 3x(1,1) - 2y(2,1)$. Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα $A_{f/\mathcal{B}}$ τῆς f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$. Ποιὰ σχέση συνδέει τοὺς πίνακες $A_{f/\mathcal{B}}$, $A_{f/\mathcal{B}'}$ καὶ P; Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα $A_{f/\mathcal{B}'}$. μον. 0.75

2. Ἔστω ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ $q(x,y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$.
(α′) Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα A τῆς q, τὶς ἰδιοτιμὲς καὶ μία ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ $\mathbb{R}^2$ ἀποτελούμενη ἀπὸ ἰδιοδιανύσματα τοῦ A. μον. 0.75
(β′) Ὑπολογῖστε διαγώνιο πίνακα D καὶ ἀντιστρέψιμο πίνακα P, τέτοιους ὥστε $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ καὶ $PDP^{\mathrm{T}} = A$. μον. 0.75
(γ′) Ὑπολογῖστε τὴ γραμμικὴ ἀλλαγὴ μεταβλητῶν $x = L_1(X,Y)$, $y = L_2(X,Y)$ ἡ ὁποία μετατρέπει τὴν $q(x,y,z)$ σὲ διαγώνιο μορφή, δηλαδή, σὲ τετραγωνικὴ μορφὴ τοῦ τύπου $Q(X,Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$. Στὴ συγκεκριμένη περίπτωση, ὑπολογῖστε τὴν $Q(X,Y)$. Τὶ γεωμετρικὸ σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου παριστάνει ἡ ἐξίσωση $q(x,y) = 0$; μον. 0.75

3. Θεωρῆστε τὸν διανυσματικὸ χῶρο $\mathbb{R}_1[X]$ τῶν πολυωνύμων βαθμοῦ ≤ 1 μὲ πραγματικοὺς συντελεστές, ἐφοδιασμένο μὲ τὸ ἐσωτερικὸ γινόμενο, ποὺ ὁρίζεται: $\langle f(X), g(X)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
(α′) Ξεκινώντας ἀπ’ τὴ βάση $\{1, X\}$ τοῦ $\mathbb{R}_1[X]$, ὑπολογῖστε μία ὀρθοκανονικὴ βάση αὐτοῦ τοῦ χώρου, τῆς μορφῆς $\mathcal{B} = \{1, g(X)\}$. μον. 0.75
(β′) Ἔστω ἡ γραμμικὴ ἀπεικόνιση $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, ποὺ ὁρίζεται: $f(c_0 + c_1X) = c_0 + c_1 g(X)$, ὅπου $g(X)$ εἶναι τὸ πολυώνυμο, ποὺ βρήκατε στὸ ἐρώτημα (α′). Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα $A_{f/\mathcal{B}}$ τῆς ἀπεικόνισης f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$. μον. 0.75
(γ′) Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα τοῦ τελεστὴ $p(f)$ ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$, ὅπου $p(X) = 2 - X + X^2$. μον. 0.75

4. Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι $\mathbb{C}$-διανυσματικὸς χῶρος πεπερασμένης διάστασης, μὲ ἐσωτερικὸ γινόμενο, $f \in \mathcal{L}(V,V)$, f^* ὁ συζυγὴς (ἢ δυϊκὸς) τελεστὴς τοῦ f καὶ λ ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*f καὶ $v \in V$ μὴ μηδενικὸ ἰδιοδιάνυσμα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ.
(α′) Ἐκφρᾶστε τὸ $\|f(v)\|^2$ συναρτήσει τῶν $\|v\|$ καὶ λ καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἰδιοτιμὴ λ εἶναι πραγματικὸς μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Συμπεράνατε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ f^*f εἶναι πραγματικοὶ μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί. μον. 0.75
(β′) Ἔστω ὅτι ὁ f εἶναι μὴ ἀντιστρέψιμος. Ἀποδεῖξτε ὅτι, τότε, τὸ 0 εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*f. μον. 0.75
(γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε $v \in V$ ἰσχύει $\langle f(v), f(v)\rangle = \langle f^*f(v), v\rangle$.
Ὑπόδειξη: Θέσετε $u = f(v)$, $g = f^*$ καὶ ὑπολογῖστε τὸ $\langle u, g^*(v)\rangle$. μον. 1
(δ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν τὸ 0 εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*f, τότε ὁ f εἶναι μὴ ἀντιστρέψιμος.
Ὑπόδειξη: Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε τὸ (γ′). μον. 0.75

5. Ἔστω ὅτι ὁ $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$, τοῦ ὁποίου οἱ ἰδιοτιμές εἶναι: λ_1 πολλαπλότητας 1 καὶ λ_2, λ_3 πολλαπλότητας 4 καὶ οἱ δύο ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$). Ὑπολογῖστε τὴν κανονικὴ μορφὴ Jordan τοῦ A, ἂν ξέρετε, ἐπιπλέον, ὅτι $\dim\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_9) = 2$, $\dim\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_9)^2 = 3$, $\dim\mathcal{N}(A - \lambda_3 I_9) = 2$, $\dim\mathcal{N}(A - \lambda_3 I_9)^2 = 4$. μον. 1

Βαθμολογία
Σύνολο μονάδων 10. Ἄριστα 10. Βάση 5.

Καλὴ ἐπιτυχία!