Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Ἐξεταστικὴ περίοδος Ἰανουαρίου 2015

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

1. Ἔστω ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, ποὺ ὁρίζεται: $f(x, y) = (2x + 3y, 3x + 4y)$. Ἔστω $\mathcal{B}$ ἡ στάνταρ βάση τοῦ $\mathbb{R}^2$ καὶ $\mathcal{B}'$ ἡ βάση $\{(1, -1), (2, -3)\}$. Ὑπολογῖστε τοὺς πίνακες $A_{f/\mathcal{B}}, A_{f/\mathcal{B}'}$ καὶ τὸν πίνακα μεταφορᾶς P ἀπὸ τὴ $\mathcal{B}'$ στὴ $\mathcal{B}$. Ποιὰ σχέση συνδέει τοὺς $A_{f/\mathcal{B}}, A_{f/\mathcal{B}'}$; Ἐπαληθεῦστε την ἀριθμητικὰ στὸ συγκεκριμένο παράδειγμα. μον. 1

2. Ἔστω ὁ πραγματικὸς πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

τοῦ ὁποίου οἱ ἰδιοτιμὲς (σᾶς τὶς δίνω ἕτοιμες γιὰ τὴ διευκόλυνσή σας) εἶναι $-1, 1, 3$.

(α′) Ποιὰ τετραγωνικὴ μορφὴ $q(x, y, z)$ ἔχει πίνακα τὸν A; μον. 0,5

(β′) Αἰτιολογῆστε, δίχως νὰ κάνετε κανέναν ὑπολογισμό, γιατὶ ὁ A εἶναι διαγωνιοποιήσιμος. Μετά, ὑπολογῖστε διαγώνιο πίνακα D καὶ ἀντιστρέψιμο πίνακα P, μὲ $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$, τέτοιους ὥστε $PDP^{\mathrm{T}} = A$. μον. 1,5

(γ′) Ὑπολογῖστε τὴ γραμμικὴ ἀλλαγὴ μεταβλητῶν $x = L_1(X, Y, Z)$, $y = L_2(X, Y, Z)$, $z = L_3(X, Y, Z)$, ἡ ὁποία μετατρέπει τὴν $q(x, y, z)$ σὲ διαγώνιο μορφή, δηλαδή, σὲ τετραγωνικὴ μορφὴ τοῦ τύπου $Q(X, Y, Z) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2$. Στὴ συγκεκριμένη περίπτωση, ὑπολογῖστε τὴν $Q(X, Y, Z)$. μον. 1

3. θεωρῆστε τὸν $\mathbb{R}$-διανυσματικὸ χῶρο $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ καὶ $\mathcal{B}$ τὴ βάση τοῦ V, τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα εἶναι

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ἔστω ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V, V)$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$ εἶναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(α′) Ὑπολογῖστε τὸν ‘‘τῦπο’’ τῆς f. Δηλαδή, ποιὸς πίνακας εἶναι ὁ $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; μον. 0,5

(β′) Δῶστε τὸν *γενικὸ ὁρισμὸ* τοῦ διαγωνιοποιήσιμου τελεστῆ. Στὴ συνέχεια, θεωρῆστε δεδομένο ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ f εἶναι $(X - 1)(X - 3)(X^2 + 3)$ καὶ ἀπαντῆστε στὸ ἐρώτημα: Εἶναι ὁ f εἶναι διαγωνιοποιήσιμος; Αἰτιολογῆστε. μον. 0,5 (γ′) Ἔστω τὸ πολυώνυμο $p(X) = 2 + 3X - X^2$. Ποιὸς εἶναι ὁ πίνακας τοῦ τελεστὴ $p(f)$ ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$; Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα $p(f)\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. μον. 1

4. Ἔστω ὅτι ὁ $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ καὶ ἔχει ἰδιοτιμές λ_1 καὶ λ_2, μὲ πολλαπλότητα 3 καὶ τὶς δύο. Δίδονται οἱ ἑξῆς πληροφορίες: (α′) Γιὰ $k = 1, 2, 3$, ὁ κλιμακωτὸς τοῦ $(A - \lambda_1 I_6)^k$ ἔχει ἀκριβῶς k τὸ πλῆθος μηδενικὲς γραμμές. (β′) Γιὰ $k = 1, 2$, ὁ κλιμακωτὸς τοῦ $(A - \lambda_2 I_6)^k$ ἔχει ἀκριβῶς $k + 1$ τὸ πλῆθος μηδενικὲς γραμμές.
   Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα Jordan τοῦ πίνακα A συναρτήσει τῶν λ_1, λ_2. μον. 1

5. Ἔστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{10}, \mathbb{C}^{10})$, ὁ ὁποῖος ἔχει μόνο μία ἰδιοτιμή, ἔστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Ἔστω $g = f - \lambda \cdot \mathrm{id}$. Δίδεται ὅτι $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 4$, $\dim(\mathrm{Ker}(g^2)) = 7$, $\dim(\mathrm{Ker}(g^3)) = 9$, $\dim(\mathrm{Ker}(g^4)) = 10$. Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα Jordan τοῦ f συναρτήσει τοῦ λ. μον. 1,5

6. Ἔστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τέτοιος ὥστε $A^* = A$, ὅπου, ἐξ ὁρισμοῦ, $A^* = (\overline{A})^{\mathrm{T}}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A εἶναι πραγματικές. μον. 1,5
   Ὑπόδειξη. Θεωρῆστε τὸν τελεστὴ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση εἶναι ὁ A. Ἂν λ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ A, θεωρῆστε τὸ $\langle f(v), v\rangle$ γιὰ κατάλληλο $v \in \mathbb{C}^n$.
   Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε ἀναπόδεικτη ὁποιαδήποτε πρόταση ἀπὸ αὐτὲς που διδάχθηκαν, ἀλλά, ἂν χρησιμοποιήσετε κάποια ἄσκηση, τότε πρέπει νὰ τὴν ἀποδείξετε.

Καλὴ ἐπιτυχία!