Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

2^{η} ἑβδομάδα - Ὕλη ἐπανάληψης

Σὲ ὅλα τὰ παρακάτω, V εἶναι ἕνας διανυσματικὸς χῶρος πάνω ἀπὸ ἕνα σῶμα F.

Ἔστω μὴ κενὸ ὑποσύνολο S τοῦ V. Σὲ προηγούμενο μάθημα ὁρίσαμε τὸ $\langle S\rangle$ ὡς τὸ σύνολο ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν στοιχείων τοῦ S καὶ ἀποδείξαμε ὅτι τὸ $\langle S\rangle$ ἰσοῦται μὲ τὴν τομὴ ὅλων τῶν ὑποχώρων τοῦ V, οἱ οποῖοι περιέχουν τὸ S. Στὴν περίπτωση ποὺ $\langle S\rangle = V$, λέμε ὅτι τὸ S γεννᾶ, ἢ παράγει, τὸν V. Ἂν τὸ S εἶναι πεπερασμένο, ἔστω $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, τότε, ἀντὶ $\langle\{s_1, \dots, s_n\}\rangle$, γράφομε ἁπλούστερα, $\langle s_1, \dots, s_n\rangle$.

Ὁρισμός. *Τὸ μὴ κενὸ ὑποσύνολο S τοῦ V λέγεται γραμμικῶς ἐξαρτημένο, ἂν ὑπάρχουν $s_1, \dots, s_n \in S$ καὶ $c_1, \dots, c_n \in F$, ὄχι ὅλα 0, τέτοια ὥστε $c_1 s_1 + \cdots + c_n s_n = \mathbf{0}$.*

Τὸ μὴ κενὸ ὑποσύνολο S τοῦ V λέγεται γραμμικῶς ἀνεξάρτητο, δὲν εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένο. Αὐτὴ ἡ συνθήκη εἶναι λογικῶς ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἑξῆς: Γιὰ ὁποιοδήποτε $n \geq 1$ καὶ ὁποιαδήποτε $s_1, \dots, s_n \in S$ καὶ ὁποιαδήποτε $c_1, \dots, c_n \in F$ ποὺ δὲν εἶναι ὅλα 0, ἰσχύει $c_1 s_1 + \cdots + c_n s_n \neq \mathbf{0}$.

Σύμβαση: Τὸ κενὸ ὑποσύνολο τοῦ V ὁρίζομε νὰ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητο.

Ὁρισμός. *Τὸ ὑποσύνολο B τοῦ V λέγεται βάση τοῦ V, ἂν πληροῖ τὶς ἑξῆς συνθῆκες. (1): $\langle B\rangle = V$, καὶ (2): Τὸ B εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητο.*

Ἂν ὁ V διαθέτει κάποια πεπερασμένη βάση, τότε χαρακτηρίζεται χῶρος πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 1. *Ἔστω A πίνακας $m \times n$, μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ F, τοῦ ὁποίου ἡ τάξη εἶναι r.[1] Τότε:*

1. $r \leq \min\{m, n\}$.

2. *Ὁ διανυσματικὸς ὑπόχωρος $\mathcal{N}(A)$ τοῦ F^n, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς λύσεις $\mathbf{x}$ τοῦ συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, λέγεται* μηδενόχωρος τοῦ A *καὶ ἔχει μιὰ βάση ἀποτελούμενη ἀπὸ $n - r$ διανύσματα. Συνεπῶς, ἂν $r < n$ (*ειδικώτερα, *αὐτὸ συμβαίνει ὅταν*

[1] Ὑπενθύμιση: Ἂν U εἶναι κλιμακωτὸς πίνακας, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸν A, τότε τὸ r εἶναι τὸ πλῆθος τῶν μὴ μηδενικῶν γραμμῶν τοῦ U.

$m < n$, δηλαδή, ὅταν οἱ ἐξισώσεις εἶναι λιγώτερες ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους), ὁ $\mathcal{N}(A)$ ἔχει θετικὴ διάσταση, ἄρα τὸ σύστημα ἔχει, πλὴν τῆς μηδενικῆς, καὶ μὴ μηδενικές λύσεις.

Παραδείγματα 1. *1. Στὸν διανυσματικὸ χῶρο $\mathbb{R}^2$, τὸ σύνολο $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ δὲν εἶναι βάση γιατὶ δὲν ἱκανοποιεῖ τὴ συνθήκη (2).*

2. Στὸν διανυσματικὸ χῶρο $\mathbb{R}^3$, τὸ σύνολο $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ δὲν εἶναι βάση γιατὶ δὲν ἱκανοποιεῖ τὴ συνθήκη (1).

3. Στὸν F-διανυσματικὸ χῶρο $F[X]$, τὸ σύνολο $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ εἶναι βάση.

Τὸ παράδειγμα 3 συζητήθηκε λεπτομερῶς. Πρόκειται γιὰ παράδειγμα διανυσματικοῦ χώρου μὴ πεπερασμένης διάστασης.

Πρόταση 1. *Ἂν $V = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$ καὶ τὰ $u_1, \dots, u_n \in V$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, τότε $n \leq m$.*

Στὸ μάθημα ἀποδείξαμε τὴν πρόταση στηριζόμενοι στὸ Θεώρημα **;;**.

Πόρισμα 1. *1. Ἂν ὁ V εἶναι πεπερασμένης διάστασης, τότε δύο ὁποιεσδήποτε βάσεις του ἔχουν τὸν ἴδιο πληθάριθμο. Ὁ κοινὸς αὐτὸς πληθάριθμος λέγεται διάσταση τοῦ V καὶ συμβολίζεται $\dim(V)$.*

2. Ἂν $\dim(V) = m$, τότε ὁποιοδήποτε σύνολο περισσοτέρων ἀπὸ m διανυσμάτων τοῦ V εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένο. Ἰσοδύναμα: Ἂν τὰ $u_1, \dots, u_n \in V$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, τότε $n \leq m$.

3. Ἂν $\dim(V) = m$, τότε δὲν ὑπάρχει ὑποσύνολο τοῦ V μὲ πληθάριθμο $< m$, ποὺ νὰ παράγει τὸν V.

4. Ἂν $W < V$, τότε $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Πρόταση 2. *Ἔστω μὴ κενὸ γραμμικῶς ἀνεξάρτητο ὑποσύνολο S τοῦ V καὶ $w \in V \setminus \langle S\rangle$. Τότε τὸ σύνολο $S \cup \{w\}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητο.*

Πόρισμα 2. *1. Ἂν $\dim(V) = m$, τότε ὁποιαδήποτε m γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα τοῦ V ἀποτελοῦν βάση τοῦ V.*

2. Ἂν $\dim(V) = m$ καὶ m διανύσματα $v_1, \dots, v_m$ τοῦ V τὸν παράγουν ($V = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$), τότε τὰ $v_1, \dots, v_m$ ἀποτελοῦν βάση τοῦ V.

3. Ἂν $\dim(V) = m$ καὶ $W \lneqq V$, τότε $\dim(W) < \dim(V)$.

Θεώρημα 2. *Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι πεπερασμένης διάστασης καὶ S ἕνα γραμμικῶς ἀνεξάρτητο ὑποσύνολο τοῦ V.*[2] *Τότε ὑπάρχει βάσει τοῦ V, ποὺ περιέχει τὸ S. Μ' ἄλλα λόγια, τὸ S μπορεῖ νὰ συμπληρωθεῖ μὲ κατάλληλα διανύσματα ὥστε νὰ προκύψει σύνολο, ποὺ νὰ εἶναι βάση τοῦ V.*

Πόρισμα 3. *Ἂν W, Z εἶναι πεπερασμένης διάστασης ὑπόχωροι τοῦ V, τότε*

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z).$$

Συνεπῶς, στὴν εἰδικὴ περίπτωση εὐθέως ἀθροίσματος ἔχομε:

$$\dim(W \oplus Z) = \dim(W) + \dim(Z).$$

Ὑπενθύμιση:

Πρόταση-Ὁρισμός 1. *Ἂν W, Z εἶναι διανυσματικοὶ ὑπόχωροι τοῦ V, τότε τὸ σύνολο*

$$W + Z = \{w + z : w \in W \textit{ καὶ } z \in Z\}$$

εἶναι διανυσματικὸς ὑπόχωρος τοῦ V καὶ λέγεται ἄθροισμα τῶν W καὶ Z.

Στὴν περίπτωση ποὺ $W \cap Z = \{\mathbf{0}\}$, ὁ ὑπόχωρος $W + Z$ χαρακτηρίζεται ὡς εὐθὺ ἄθροισμα *τῶν W καὶ Z καὶ συμβολίζεται $W \oplus Z$.*

Ὁρισμός. *Ἔστω V, W διανυσματικοὶ χῶροι πάνω ἀπὸ τὸ σῶμα F, μὲ $\dim(V) = n$ καὶ $\dim(W) = m$. Ἔστω $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μιὰ βάση τοῦ V, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ μιὰ βάση τοῦ W καὶ $f : V \to W$ γραμμικὴ ἀπεικόνιση. Ἂν*

$$\begin{array}{rcl}
f(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\
f(v_2) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\
\vdots & & \vdots \\
f(v_n) & = & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m
\end{array}$$

τότε ὁ πίνακας

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

λέγεται πίνακας τῆς ἀπεικόνισης f ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\{v_1, \ldots, v_n\}$ καὶ $\{w_1, \ldots, w_m\}$. Στὴν περίπτωση ποὺ $W = V$ καὶ πάρομε ὡς $\{w_1, \ldots, w_m\}$ τὴ βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$, τότε λέμε ἁπλῶς ὅτι ὁ A_f εἶναι ὁ πίνακας τῆς f ὡς πρὸς τὴ βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

[2] Παρατηρῆστε ὅτι τὸ S εἶναι, ἀναγκαστικά, πεπερασμένο.

Παραδείγματα 2. *1. Ἔστω*

$$f = f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in F[X].$$

Τυπικὴ παράγωγος τοῦ f εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ πολυώνυμο

$$f' = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 2a_2X + a_1 \in F[X].$$

Ἰσχύουν οι ἰδιότητες ($f, g \in F[X]$, $\lambda \in F$)

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Ἡ ἀπεικόνιση $D : F[X] \to F[X]$, ποὺ ὁρίζεται: $D(f) = f'$, εἶναι γραμμική. Ἀνάλογα, ἂν θεωρήσομε τὸν διανυσματικὸ χῶρο $F_n[X]$ τῶν πολυωνύμων βαθμοῦ, τὸ πολύ, n, τότε ἡ ἀπεικόνιση $D : F_n[X] \to F_n[X]$, ποὺ ὁρίζεται: $D(f) = f'$, εἶναι γραμμική, ἐπίσης. Ὁ πίνακας τῆς γραμμικῆς ἀπεικόνισης D ὡς πρὸς τὴ βάση $\{1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n\}$ εἶναι

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ἄσκηση: Ἐπειδὴ $\deg(f') = \deg(f) - 1$, μποροῦμε νὰ θεωρήσομε, ἐπίσης, τὴ γραμμικὴ ἀπεικόνιση $D : F_n[X] \to F_{n-1}[X]$. Ποιὸς εἶναι ὁ πίνακας τῆς D ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\{1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n\}$ καὶ $\{1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}\}$;

2. *Ἔστω $C(\mathbb{R})$ ὁ $\mathbb{R}$-διανυσματικὸς χῶρος τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καὶ $I : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ ἡ ἀπεικόνιση, ποὺ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:*

$$I(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Τότε ἡ I εἶναι γραμμικὴ ἀπεικόνιση.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Α. Μελάς, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εἰσαγωγή στη Γραμμική Ἄλγεβρα* (δίτομο), Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2008.

[2] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Α. Μελάς, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εἰσαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα* (σὲ ἕνα τόμο), Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.

[3] Χρ. Κουρουνιώτης *Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας ΙΙ*, http://www.math.uoc.gr/~chrisk/LinAlgII-Notes.pdf