Γραμμική Άλγεβρα II

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Σύνοπτικὴ περιγραφὴ τῆς μέχρι τώρα διδαγμένης ὕλης.[1]

1 Ὁ διανυσματικὸς χῶρος $\mathcal{L}(V, W)$

Σὲ αὐτὴ τὴν ἑνότητα, V, W εἶναι διανυσματικοὶ χῶροι πάνω ἀπὸ ἕνα σῶμα F. Ὑποθέτομε ὅτι $\dim(V) = n$ καὶ $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ εἶναι μιὰ βάση τοῦ V καὶ $\dim(W) = m$ καὶ $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ εἶναι μιὰ βάση τοῦ W.

Διανυσματικὸς χῶρος $\mathcal{L}(V, W)$ = διανυσματικὸς χῶρος τῶν γραμμικῶν ἀπεικονίσεων $V \to W$.
Δεῖτε: [1, §5.4] Προτάσεις 5.4.1 καὶ 5.4.2, ἢ [2, Τόμος I, §5.4] Προτάσεις 5.4.1 καὶ 5.4.2.

Συμβολισμός: Ἂν $v \in V$ καὶ $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, τότε χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $[v]_{\mathcal{B}}$ γιὰ τὴ στήλη τῶν συντεταγμένων τοῦ v ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$, δηλαδή,

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ἄσκηση 1 *1.* $[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$ *καὶ* $[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}}$ *(*$u, v \in V$, $\lambda \in F$*).*

2. $[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, [v_n]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

3. Ἔστω $M_1, M_2 \in F^{m \times n}$ *(*m *ὁποιοσδήποτε φυσικός). Ἂν* $M_1 \cdot [v]_{\mathcal{B}} = M_2 \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ *γιὰ κάθε* $v \in V$*, τότε* $M_1 = M_2$

[1]Πρόκειται γιὰ νέα ὕλη καὶ ὄχι σὲ ὕλη ἐπανάληψης.

Πρόταση 1.1 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V, W)$ καὶ A_f ὁ πίνακας τῆς f ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Τότε, γιὰ κάθε $v \in V$ ἀληθεύει ἡ σχέση*

$$[f(v)]_{\mathcal{B}'} = A_f \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

Ἀπόδειξη Πρῶτα ἀποδεικνύομε τὴν πρόταση γιὰ τὰ στοιχεῖα τῆς βάσης v_j, $(j = 1, \dots, n)$. Ἡ ἀποδεικτέα γράφεται

$$[f(v_j)]_{\mathcal{B}'} = A_f \cdot [v_j]_{\mathcal{B}}.$$

Ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ ὁρίζεται ὁ πίνακας μιᾶς γραμμικῆς ἀπεικόνισης, ἔχομε ὅτι οἱ συντεταγμένες τοῦ $f(v_j)$ ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}'$ εἶναι ἀκριβῶς, τὰ στοιχεῖα τῆς j-στήλης τοῦ A_f. Ἄρα, τὸ ἀριστερὸ μέλος τῆς παραπάνω σχέσης εἶναι ἴσο μὲ τὴ j-στήλη τοῦ A_f. Ἀπὸ τὴν ἄλλη, ἡ προηγούμενη ἄσκηση μᾶς λέει ὅτι $[v_j]_{\mathcal{B}}$ εἶναι ἡ στήλη, ποὺ ἔχει στὴ θέση j τὸ 1 καὶ παντοῦ ἀλλοῦ 0. Ἄρα τὸ δεξιὸ μέλος ἰσοῦται μὲ

$$A_f \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-θέση} = j\text{-στήλη } A_f = \text{ἀριστερὸ μέλος}$$

Ἔστω τώρα τυχαῖο $v \in V$. Ἂν $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ τότε, κάνοντας χρήση τοῦ (1) τῆς προηγούμενης ἄσκησης, ἔχομε:

$$\begin{aligned}
[f(v)]_{\mathcal{B}'} &= [f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)]_{\mathcal{B}'} = [\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)]_{\mathcal{B}'} \\
&= [\lambda_1 f(v_1)]_{\mathcal{B}'} + \cdots + [\lambda_n f(v_n)]_{\mathcal{B}'} = \lambda_1 [f(v_1)]_{\mathcal{B}'} + \cdots + \lambda_n [f(v_n)]_{\mathcal{B}'} \\
&= \lambda_1 (A_f \cdot [v_1]_{\mathcal{B}}) + \cdots + \lambda_n (A_f \cdot [v_n]_{\mathcal{B}}) = A_f \cdot (\lambda_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \lambda_n [v_n]_{\mathcal{B}}) \\
&= A_f \cdot [\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n]_{\mathcal{B}} = A_f \cdot [v]_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1.2 *Ἡ ἀπεικόνιση*

$$\mathcal{L}(V, W) \ni f \stackrel{\phi}{\longmapsto} A_f \in F^{m \times n},$$

(A_f εἶναι ὁ πίνακας τῆς f ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$), εἶναι ἰσομορφισμός. Μ' ἄλλα λόγια, ἡ ἀπεικόνιση, ποὺ σε κάθε $f \in \mathcal{L}(V, W)$ στέλνει τὸν πίνακα τῆς f ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, εἶναι ἰσομορφισμός διανυσματικῶν χώρων.

Ἀπόδειξη Πρῶτα ἀποδεικνύομε τὴ γραμμικότητα τῆς ϕ.

Ἔστω ὅτι $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$. Ἡ σχέση $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $A_{f+g} = A_f + A_g$. Ἀπὸ τὴν ἄσκηση 1(3), ἀρκεῖ νὰ δείξομε ὅτι, γιὰ κάθε $v \in V$ ἀληθεύει ἡ σχέση

$$A_{f+g} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = (A_f + A_g) \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

Θὰ χρησιμοποιήσομε τὴν Πρόταση 1.1 καὶ τὴν ἄσκηση 1(1).

$$\begin{aligned} A_{f+g} \cdot [v]_{\mathcal{B}} &= [(f+g)(v)]_{\mathcal{B}'} = [f(v) + g(v)]_{\mathcal{B}'} = [f(v)]_{\mathcal{B}'} + [g(v)]_{\mathcal{B}'} \\ &= A_f \cdot [v]_{\mathcal{B}} + A_g \cdot [v]_{\mathcal{B}} = (A_f + A_g) \cdot [v]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Μὲ ἀνάλογο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν $\lambda \in F$ καὶ $f \in \mathcal{L}(V, W)$, τότε $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$· βλ. ἄσκηση 3.

Τώρα θ' ἀποδείξομε ὅτι ἡ ϕ εἶναι 1−1. Πράγματι, ἂν $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ καὶ $\phi(f) = \phi(g)$, αὐτὸ σημαίνει ὅτι $A_f = A_g$. Ἄρα, γιὰ κάθε $v \in V$ ἰσχύει ὅτι $A_f \cdot [v]_{\mathcal{B}} = A_g \cdot [v]_{\mathcal{B}}$, ὁπότε, ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.1, $[f(v)]_{\mathcal{B}'} = [g(v)]_{\mathcal{B}'}$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ διανύσματα $f(v)$ καὶ $g(v)$ ἔχουν τὶς ἴδιες συντεταγμένες ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἔτσι, καταλήξαμε στὸ συμπέρασμα ὅτι $f(v) = g(v)$ γιὰ κάθε $v \in V$, ἄρα $f = g$.

Τέλος, ἡ ϕ εἶναι "ἐπί". Πράγματι, ἔστω $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$. Τότε, ἡ $f \in \mathcal{L}(V, W)$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ συνθήκη $f(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m$ γιὰ $j = 1, \ldots, m$, ἔχει πίνακα ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ τοῦ ὁποίου ἡ j-στήλη ἔχει ὡς στοιχεῖα της τὰ $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$, κι αὐτὸ γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, n$. Ἄρα, ὁ πίνακας αὐτῆς τῆς f ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ταυτίζεται μὲ τὸν A· δηλαδή, $\phi(f) = A$.

□

Πόρισμα 1.3 *Ἂν οἱ διανυσματικοὶ χῶροι V καὶ W εἶναι πεπερασμένης διάστασης, τότε*

$$\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Ἀπόδειξη Ἔστω $\dim(V) = n$ καὶ $\dim(W) = m$. Τὸ Θεώρημα 1.2 συνεπάγεται ὅτι $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(F^{m\times n})$. Ἀλλὰ ὁ χῶρος $F^{m\times n}$ ἔχει διάσταση mn, διότι μιὰ βάση του εἶναι (προφανῶς) ἡ $\mathcal{E} = \{E_{ij} : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$, ὅπου E_{ij} εἶναι ὁ $m \times n$ πίνακας μὲ 1 στὴ θέση (i, j) καὶ 0 σὲ κάθε ἄλλη θέση. Προφανῶς, ὁ πληθάριθμος τῆς $\mathcal{E}$ εἶναι mn.

□

Ἄσκηση 2 *Μὲ τὸν συμβολισμὸ καὶ τὶς ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 1.2, ἀποδεῖξτε ὅτι ἂν $\lambda \in F$ καὶ $f \in \mathcal{L}(V, W)$, τότε $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$.*

Ἄσκηση 3 *Στὴν ἀπόδειξη τοῦ Πορίσματος 1.3 ἀναφέρονται οἱ πίνακες E_{ij}. Ποιὲς εἶναι οἱ προεικόνες τους μέσῳ τοῦ ἰσομορφισμοῦ ϕ τοῦ Θεωρήματος 1.2; Μ' ἄλλα λόγια, ποιὰ εἶναι ἡ γραμμικὴ ἀπεικόνιση $f_{ij} \in \mathcal{L}(V, W)$, γιὰ τὴν ὁποία $\phi(f_{ij}) = E_{ij}$;*

2 Ἡ ἄλγεβρα $\mathcal{L}(V, V)$

Σὲ αὐτὴ τὴν ἑνότητα, V εἶναι διανυσματικὸς χῶρος πάνω ἀπὸ ἕνα σῶμα F. Ὑποθέτομε ὅτι $\dim(V) = n$ καὶ $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ εἶναι μιὰ βάση τοῦ V.

Ξεκινοῦμε μ' ἕναν γενικὸ ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω διανυσματικὸς χῶρος U πάνω ἀπὸ ἕνα σῶμα F, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐφοδιασμένος μὲ μία ἐπιπλέον (ἐσωτερικὴ πράξη) συμβολιζόμενη $\cdot$ ποὺ τὴ λέμε *πολλαπλασιασμό*[2] καὶ ἱκανοποιεῖ τὶς ἑξῆς συνθῆκες:

i. $u_1 \cdot (u_2 \cdot u_3) = (u_1 \cdot u_2) \cdot u_3 \ \ \forall\, u_1, u_2, u_3 \in U$.

ii. $u_1 \cdot (u_2 + u_3) = u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot u_2$ & $(u_2 + u_3) \cdot u_1 = u_2 \cdot u_1 + u_3 \cdot u_1 \ \ \forall\, u_1, u_2, u_3 \in U$.

iii. $\lambda(u_1 \cdot u_2) = (\lambda u_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot (\lambda u_2) \ \ \forall \lambda \in F \ \ \forall u_1, u_2 \in U$.

Τότε λέμε ὅτι ὁ V εἶναι μία *ἄλγεβρα* ἐπὶ τοῦ F.

Ἄσκηση 4 *1. Ὁ διανυσματικὸς χῶρος $F[X]$ τῶν πολυωνύμων μὲ συντελεστὲς στὸ F, ἐφοδιασμένος μὲ τὸν συνήθη πολλαπλασιασμὸ πολυωνύμων, εἶναι ἄλγεβρα ἐπὶ τοῦ F.*

2. Ὁ διανυσματικὸς χῶρος $F^{n\times n}$, ἐφοδιασμένος μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ πινάκων, εἶναι ἄλγεβρα ἐπὶ τοῦ F.

3. Ὁ διανυσματικὸς χῶρος $\mathcal{L}(V, V)$ μὲ τὴν πράξη $\circ$ τῆς σύνθεσης ἀπεικονίσεων εἶναι ἄλγεβρα ἐπὶ τοῦ F.

Θεώρημα 2.1 *Ἡ ἀπεικόνιση*

$$\mathcal{L}(V, V) \ni f \stackrel{\phi}{\longmapsto} A_f \in F^{n\times n},$$

(A_f εἶναι ὁ πίνακας τῆς f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$), εἶναι ἰσομορφισμὸς ἀλγεβρῶν. Δηλαδή, ἐπιπλέον τοῦ ἰσομορφισμοῦ τῶν διανυσματικῶν χώρων, ἰσχύει καὶ

$$\phi(g \circ f) = \phi(g) \cdot \phi(f).$$

Ἀπόδειξη Ἡ ϕ εἶναι ἰσομορφισμὸς διανυσματικῶν χώρων, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 1.2. Ἐπιπλέον, $\phi(g \circ f) = A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \phi(g) \cdot \phi(f)$.

□

[2] Προσοχή! Νὰ μὴ συγχέεται μὲ τὸν "πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ βαθμωτό", μὲ τὸν ὁποῖο εἶναι, ἐπίσης, ἐφοδιασμένος ὁ V.

3 Ἀλλαγὴ βάσης

Σὲ αὐτὴ τὴν ἑνότητα, V εἶναι διανυσματικὸς χῶρος πάνω ἀπὸ ἕνα σῶμα F. Ὑποθέτομε ὅτι $\dim(V) = n$ καὶ $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ εἶναι δύο βάσεις τοῦ V (διαφορετικὲς ἐν γένει).

Ἐκφράζομε τὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}'$ συναρτήσει τῆς $\mathcal{B}$:

$$v'_j = p_{1j}v_1 + \cdots + p_{nj}v_n \quad (j = 1, \ldots, n),$$

καὶ θεωροῦμε τὸν πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1j} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & \ldots & p_{2j} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \ldots & p_{nj} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ἄσκηση 5 *Ἀποδεῖξτε ὅτι P εἶναι ὁ πίνακας τῆς γραμμικῆς ἀπεικόνισης* $\mathrm{id}' : V \to V$ *ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}', \mathcal{B}$· δηλαδή, $A_{\mathrm{id}'} = P$. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι ὁ P εἶναι ἀντιστρέψιμος καὶ P^{-1} εἶναι ὁ πίνακας τῆς γραμμικῆς ἀπεικόνισης* $\mathrm{id} : V \to V$ *ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$· δηλαδή, $A_{\mathrm{id}} = P^{-1}$.*

Σχόλιο: Οἱ ἀπεικονίσεις id καὶ id′ εἶναι, καὶ οἱ δύο, οἱ ταυτοτικὲς τοῦ V καὶ δὲν διαφέρουν σὲ τίποτα. Χρησιμοποιοῦμε ἐλαφρῶς διαφορετικὸ σύμβολο μόνο γιὰ νὰ δηλώσομε ὅτι τὸν πίνακα τῆς id τὸν θεωροῦμε ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}'$ καὶ $\mathcal{B}$, ἐνῶ τὸν πίνακα τῆς id′, ὡς πρὸς τὶς $\mathcal{B}'$ καὶ $\mathcal{B}$.

Πρόταση 3.1 *Ἂν P εἶναι ὁ πίνακας (1), τότε, γιὰ κάθε $v \in V$ ἰσχύουν οἱ σχέσεις*

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \quad \textit{καὶ} \quad [v]_{\mathcal{B}} = P \cdot [v]_{\mathcal{B}'}.$$

Ἀπόδειξη Θεωροῦμε τὴ ταυτοτικὴ γραμμικὴ ἀπεικόνιση $\mathrm{id} : V \to V$. Ὁ πίνακάς της A_{id} ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ εἶναι, σύμφωνα μὲ τὴν ἄσκηση 5, ὁ P^{-1}. Ἄρα, ἐφαρμόζοντας τὴν Πρόταση 1.1 στὴ συγκεκριμένη εἰδικὴ περίπτωση, παίρνομε $[\mathrm{id}(v)]_{\mathcal{B}'} = A_{\mathrm{id}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$, ποὺ δὲν εἶναι ἄλλη παρὰ ἡ σχέση $[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$. Πολλαπλασιάζοντας τὴν τελευταία ἐπὶ P παίρνομε τὴ σχέση $[v]_{\mathcal{B}} = P \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$.

□

Ἡ σχέση $[v]_{\mathcal{B}} = P \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$ αἰτιολογεῖ τὸν ἑξῆς ὁρισμό:

Ὁρισμός. Ὁ πίνακας P στὴν (1) λέγεται *πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴ βάση $\mathcal{B}'$ στὴ βάση $\mathcal{B}$.*

Ἔστω τώρα $f \in \mathcal{L}(V, V)$, δηλαδή, μιὰ γραμμικὴ ἀπεικόνιση $f : V \to V$. Ἔχει καθιερωθεῖ νὰ χαρακτηρίζομε αὐτοῦ τοῦ εἴδους τὶς ἀπεικονίσεις ὡς *γρμμικοὺς τελεστὲς τοῦ V* καὶ τὸν $\mathcal{L}(V, V)$ ὡς τὸν *χῶρο τῶν γραμμικῶν τελεστῶν τοῦ V*. Ἔστω $A_{f/\mathcal{B}}$ ὁ πίνακας τῆς f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$ καὶ $A_{f/\mathcal{B}'}$ ὁ πίνακας τῆς f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}'$.

Θεώρημα 3.2 *Ἂν $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ εἶναι βάσεις τοῦ V καὶ P ὁ πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴ $\mathcal{B}'$ στὴ $\mathcal{B}$, τότε*

$$A_{f/\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P$$

Ἀπόδειξη Θεωροῦμε τὴ σύνθεση γραμμικῶν ἀπεικονίσεων

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}'} & V & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{\mathrm{id}} & V \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \\ & A_{\mathrm{id}'} & & A_{f/\mathcal{B}} & & A_{\mathrm{id}} & \end{array}$$

Ἡ σύνθεση τῶν παραπάνω ἀπεικονίσεων $\mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}' = f$ ἔχει πίνακα ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}'$ τὸν $A_{f/\mathcal{B}'}$. Ἀλλὰ ὁ πίνακας τῆς σύνθεσης γραμμικῶν ἀπεικονίσεων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν πινάκων τῶν ἀπεικονίσεων αὐτῶν, ἄρα

$$A_{f/\mathcal{B}'} = A_{\mathrm{id}\circ f \circ \mathrm{id}'} = A_{\mathrm{id}} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot A_{\mathrm{id}'} = P^{-1} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P.$$

□

Ἄσκηση 6 *Θεωροῦμε τὶς ἑξῆς δύο βάσεις τοῦ $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,1), (-1,0,1)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(1,0,2), (-1,1,1), (-1,2,0)\}.$$

1. *Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα P μετάβασης ἀπὸ τὴ $\mathcal{B}'$ στὴ $\mathcal{B}$.*
   Ἀπάντηση: $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
2. *Ἔστω ὁ γραμμικὸς τελεστὴς $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μὲ $f(x,y,z) = (x, x-y, x+2y)$. Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα $A_{f/\mathcal{B}}$ τοῦ f ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$ καὶ τὸν πίνακα $A_{f/\mathcal{B}'}$ τοῦ f ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}'$.*
   Ἀπάντηση: $A_{f/\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{f/\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/2 \\ -1 & 5/2 & 4 \\ 1 & -9/4 & -7/2 \end{pmatrix}$.
3. *Ἐπαληθεῦστε τὴ σχέση $A_{f/\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P$* (βλ.Θεώρημα 3.2).

Τὸ παρακάτω θεώρημα εἶναι, κατὰ κάποιον τρόπο, τὸ ἀντίστροφο τοῦ θεωρήματος 3.2.

Θεώρημα 3.3 *Ἔστω F-διανυσματικὸς χῶρος V διαστάσεως n καὶ $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ μιὰ βάση του. Ἔστω $P = (p_{ij}) \in F^{n\times n}$ ἀντιστρέψιμος. Γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, n$ ὁρίζομε τὸ διάνυσμα*

$$v'_j = p_{1j}v_1 + \cdots + p_{nj}v_n.$$

Τότε τὸ σύνολο $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ ἀποτελεῖ βάση τοῦ V. Ἐπιπλέον, ἂν $f \in \mathcal{L}(V,V)$ καὶ $A_{f/\mathcal{B}}$, $A_{f/\mathcal{B}'}$ εἶναι οἱ πίνακες τοῦ τελεστῆ f ὡς πρὸς τὶς βάσεις $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{B}'$, ἀντιστοίχως, τότε

$$A_{f/\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P.$$

Ἀπόδειξη Ἔστω g ὁ γραμμικὸς τελεστὴς τοῦ V, ποὺ ὁρίζεται μέσῳ τῶν σχέσεων $g(v_j) = v'_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Ὁ πίνακας τοῦ g, προφανῶς, εἶναι ὁ P, καὶ ἀφοῦ ὁ P εἶναι ἀντιστρέψιμος, ἕπεται ὅτι ὁ g εἶναι ἀντιστρέψιμος· εἰδικώτερα, ὁ γραμμικὸς τελεστὴς g^{-1} εἶναι $1-1$.

Τώρα θὰ ἀποδείξομε τὴ γραμμικὴ ἀνεξαρτησία τῶν $v'_1, \ldots, v'_n$: Ἂν $\lambda_1 v'_1 + \cdots \lambda_n v'_n = 0$, θὰ δείξομε ὅτι ὅλοι οἱ συντελεστὲς λ_i εἶναι, ἀναγκαστικά, μηδέν. Πράγματι,

$$0 = g^{-1}(0) = g^{-1}(\lambda_1 v'_1 + \cdots \lambda_n v'_n) = \lambda_1 g^{-1}(v'_1) + \cdots \lambda_n g^{-1}(v'_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n.$$

Ὅμως τὰ $v_1, \ldots, v_n$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἄρα, ἡ τελευταία ἰσότητα συνεπάγεται ὅτι $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Ἔτσι, τὰ $v'_1, \ldots, v'_n$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα καὶ τόσα ὅση ἡ διάσταση τοῦ V, ἄρα ἀποτελοῦν βάση, ἔστω $\mathcal{B}'$, τοῦ V.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῶν v'_j, ὁ πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴ βάση $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ στὴ βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ εἶναι ὁ P, ἄρα, ἂν $f \in \mathcal{L}(V, V)$, ἐφαρμόζομε τὸ Θεώρημα 3.2 καὶ παίρνομε τὴ σχέση $A_{f/\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P$.

□

4 Διαγωνιοποίηση

Σὲ αὐτὴ τὴν ἑνότητα, V εἶναι διανυσματικὸς χῶρος πάνω ἀπὸ ἕνα σῶμα F καὶ $\dim(V) = n$. Ὁ ταυτοτικὸς τελεστὴς $V \to V$ συμβολίζεται id καὶ ὁ ταυτοτικὸς $n \times n$ πίνακας μὲ I. Ἂν $\mathcal{B}$ εἶναι βάση τοῦ V καὶ $f \in \mathcal{L}(V, V)$, τότε $A_{f/\mathcal{B}}$ συμβολίζει τὸν πίνακα τοῦ f ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$. X συμβολίζει τὴ μεταβλητὴ τῶν πολυωνύμων μὲ συντελεστὲς ἀπὸ τὸ F.

Θεωροῦνται γνωστοὶ οἱ ορισμοὶ καὶ τὰ ἐντελῶς βασικὰ τῶν ἰδιοτιμῶν καὶ ἰδιοδιανυσμάτων· βλ. [1, §2.1], ἢ [2, §2.1], ἢ [4, σελ.85-86].

Θεώρημα 4.1 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{B}$ μιὰ ὁποιαδήποτε βάση τοῦ V καὶ A_f ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$. Ἔστω $\lambda \in F$. Οἱ ἑξῆς προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμες:*

(i) *λ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f.*

(ii) *Ὁ τελεστὴς $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ εἶναι μὴ ἀντιστρέψιμος.*

(iii) $|A_f - \lambda \cdot I| = 0$

Ἀπόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii) : Ἡ ὑπόθεση σημαίνει ὅτι ὑπάρχει $v \neq 0$, τέτοιο ὥστε $f(v) = \lambda v$, ἄρα $\mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \supsetneqq \{0\}$. Ἄρα ὁ τελεστὴς $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ δὲν εἶναι 1-1, ὁπότε δὲν εἶναι ἀντιστρέψιμος.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Ἀφοῦ ὁ τελεστὴς $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ δὲν εἶναι ἀντιστρέψιμος, ἕπεται ὅτι ὁ πίνακάς του (ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$) $A_{f-\lambda\cdot\mathrm{id}}$ δὲν εἶναι ἀντιστρέψιμος. Ὅμως

$$A_{f-\lambda\cdot\mathrm{id}} = A_f - A_{\lambda\cdot\mathrm{id}} = A_f - \lambda \cdot A_{\mathrm{id}} = A_f - \lambda \cdot I,$$

ἄρα ὁ πίνακας $A_f - \lambda \cdot I$ εἶναι μὴ ἀντιστρέψιμος. Αὐτό, ὡς γνωστόν, ἰσοδυναμεῖ μὲ μηδενισμὸ τῆς ὁρίζουσάς του.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Ἡ ὑπόθεση συνεπάγεται ὅτι ὑπάρχει μὴ μηδενικὴ στήλη $\mathbf{x}$, τέτοια ὥστε $(A_f - \lambda \cdot I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ὁπότε $A_f \cdot \mathbf{x} = (\lambda \cdot I) \cdot \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Θεωροῦμε τὸ μὴ μηδενικὸ διάνυσμα v, τοῦ ὁποίου ἡ στήλη τῶν συντεταγμένων ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$ εἶναι ἡ $\mathbf{x}$, δηλαδή, $[v]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$ καὶ ἐφαρμόζομε τώρα τὴν Πρόταση 1.1 μὲ $W = V$ καὶ $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, ὁπότε ἔχομε

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = A_f \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}}.$$

Ἄρα, τὰ διανύσματα $f(v)$ καὶ λv ἔχουν ἴσες συντεταγμένες, ὁπότε εἶναι ἴσα: $f(v) = \lambda v$, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ λ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f.

□

Ὁρισμός. Ἄν $M \in F^{n\times n}$, τότε τὸ πολυώνυμο $|M - X \cdot I| \in F[X]$[3] λέγεται χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ πίνακα M.

Τὸ Θεώρημα 4.1 μᾶς λέει ὅτι τὸ $\lambda \in F$ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ πίνακα A_f.

Ὁρισμός. Οἱ πίνακες $M, N \in F^{n\times n}$ χαρακτηρίζονται ὅμοιοι ἂν ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ὥστε $N = P^{-1}MP$.

Ἄσκηση 7 *Στὸ σύνολο $F^{n\times n}$ ἡ σχέση ὁμοιότητας, ποὺ μόλις ὡρίσαμε, εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.*

Πρόταση 4.2 *Ἂν οἱ $n \times n$ πίνακες M, N εἶναι ὅμοιοι, τότε τὰ χαρακτηριστικὰ πολυώνυμά τους εἶναι ἴσα.*

Ἀπόδειξη Ἔστω $N = P^{-1}MP$. Τότε, γιὰ τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ N ὑπολογίζομε

$$\begin{aligned}|N - X \cdot I| &= |P^{-1}MP - X \cdot P^{-1}P| = |P^{-1}MP - P^{-1}(X \cdot I)P)| = |P^{-1}(M - X \cdot I)P| \\ &= |P^{-1}||M - X \cdot I||P| = |P|^{-1}|M - X \cdot I||P| = |M - X \cdot I||P|,\end{aligned}$$

ποὺ εἶναι τα χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ M

□

Πρόταση-Ὁρισμός 4.3 *Ἂν $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ εἶναι βάσεις τοῦ V καὶ $f \in \mathcal{L}(V, V)$, τότε τὰ χαρακτηριστικὰ πολυώνυμα τῶν πινάκων $A_{f/\mathcal{B}}$ καὶ $A_{f/\mathcal{B}'}$ εἶναι ἴσα. Ἄρα, τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ πίνακα τοῦ f εἶναι ἀναξάρτητο ἀπὸ τὴ βάση, ποὺ ἔχομε ἐπιλέξει καὶ καλεῖται χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ τελεστὴ f καὶ συμβολίζεται $\chi_f(X) \in F[X]$. Ἕνα στοιχεῖο $\lambda \in F$ εἶναι ρίζα τοῦ $\chi_f(X)$ ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f.*

[3]Παρατηρῆστε ὅτι ὁ βαθμός του εἶναι $\leq n$.

Ἀπόδειξη Οἱ πίνακες $A_{f/\mathcal{B}}$ καὶ $A_{f/\mathcal{B}'}$ εἶναι ὅμοιοι, βάσει τοῦ Θεωρήματος 3.2, ἄρα, ἀπὸ τὴν Πρόταση 4.2, τὰ χαρακτηριστικὰ πολυώνυμά τους εἶναι ἴσα.

□

Ὁρισμός. Ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V,V)$ λέμε ὅτι εἶναι *διαγωνιοποιήσιμος* ἂν ὑπάρχει βάση $\mathcal{B}$ τοῦ V, τέτοια ὥστε ὁ πίνακας $A_{f/\mathcal{B}}$ νὰ εἶναι διαγώνιος.

Πρόταση 4.4 *Ἔστω ὅτι ὁ $f \in \mathcal{L}(V,V)$ εἶναι διαγωνιοποιήσιμος καὶ $\mathcal{B}$ βάση, ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὁ $A_{f/\mathcal{B}}$ εἶναι διαγώνιος, μὲ διαγώνια στοιχεῖα ἔστω $\mu_1,\ldots,\mu_n \in F$. Τότε, κάθε μ_j εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f καί, ἀντιστρόφως, γιὰ κάθε $\lambda \in F$ ποὺ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f, ὑπάρχει $i \in \{1,\ldots,n\}$ τέτοιο ὥστε $\mu_i = \lambda$.*

Ἀπόδειξη Ἔστω $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$. Γιὰ κάθε $j = 1,\ldots,n$, ἡ j-στήλη τοῦ $A_{f/\mathcal{B}}$ ἔχει στὴ j-θέση τὸ μ_j καὶ σὲ ὅλες τὶς ὑπόλοιπες τὸ 0. Ἄρα $f(v_j) = 0v_1+\cdots+\mu_j v_j+\cdots+0v_n = \mu_j v_j$. Αὐτὸ σημαίνει[4] ὅτι τὸ μ_j εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f.

Ἀντιστρόφως, ἔστω $\lambda \in F$ ἰδιοτιμὴ τοῦ f καὶ $v \neq 0$ τέτοιο ὥστε $f(v) = \lambda v$. Ἐκφράζομε τὸ v συναρτήσει τῆς $\mathcal{B}$:

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n, \tag{2}$$

ὅπου, προφανῶς, τὰ c_j δὲν εἶναι ὅλα μηδέν. Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, $f(v_j) = \mu_j v_j$ γιὰ κάθε $j = 1,\ldots,n$. Ἐφαρμόζοντας τὸν f στὴν (2) παίρνομε τὴ σχέση

$$\lambda v = f(v) = c_1 f(v_1) + \cdots + c_n f(v_n) = (c_1\mu_1)v_1 + \cdots + (c_n\mu_n)v_n. \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζοντας τὴν (2) ἐπὶ λ παίρνομε $\lambda v = (c_1\lambda)v_1 + \cdots + (c_n\lambda)v_n$. Ἀφαιρώντας κατὰ μέλη αὐτὴ τὴ σχέση ἀπὸ τὴν (3) καταλήγομε στὴ σχέση

$$0 = c_1(\mu_1 - \lambda)v_1 + \cdots + c_n(\mu_n - \lambda)v_n.$$

Λόγῳ τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν $v_1,\ldots,v_n$, συμπεραίνομε ὅτι $c_i(\mu_i - \lambda) = 0$. Ὅμως, δὲν εἶναι ὅλα τὰ c_i μηδέν. Ἔστω γιὰ κάποιο δείκτη j ὅτι $c_j \neq 0$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη, $c_j(\mu_j - \lambda) = 0$, ἄρα $\mu_j = \lambda$.

□

Ἔστω $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ὅλες οἱ διαφορετικὲς ἰδιοτιμὲς τοῦ f, ποὺ ἀνήκουν στὸ F καὶ $W_1,\ldots,W_k$ οἱ ἀντίστοιχοι ἰδιόχωροι.

Βάσει τῆς Προτάσεως 4.4 (καὶ διατηρώντας τὶς ὑποθέσεις καὶ τοὺς συμβολισμούς της), συμπεραίνομε ὅτι κάθε διάνυσμα τῆς $\mathcal{B}$ εἶναι ἰδιοδιάνυσμα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ κάποια ἰδιοτιμὴ λ_i, ἄρα ἀνήκει σὲ κάποιον ἰδιόχωρο W_i. Καὶ ἀντιστρόφως, γιὰ κάθε $i = 1,\ldots,k$ ὑπάρχει ἕνα (τουλάχιστον) διάνυσμα τῆς $\mathcal{B}$, ποὺ ἀνήκει στὸν W_i. Συνεπῶς, τὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}$ κατανέμονται σὲ ὑποσύνολα: Αὐτὰ ποὺ ἀνήκουν

[4] Τὸ v_j, ὡς διάνυσμα βάσεως, εἶναι μὴ μηδενικό

στὸν W_1, αὐτὰ ποὺ ἀνήκουν στὸν $W_2, \dots$, αὐτὰ ποὺ ἀνήκουν στὸν W_k. Ἔστω d_i τὸ πλῆθος τῶν διανυσμάτων τῆς $\mathcal{B}$, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν στὸν ἰδιόχωρο W_i $(i = 1, \dots, k)$.[5]
Ἐπαναδιατάσσομε τὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}$ ὡς ἑξῆς:
Πρῶτα γράφομε τὰ d_1 διανύσματα ποὺ ἀνήκουν στὸν W_1, ὕστερα τὰ d_2 διανύσματα ποὺ ἀνήκουν στὸν W_2, κ.ο.κ. καί, τέλος, τὰ d_k διανύσματα ποὺ ἀνήκουν στὸν W_k.
Συμβολίζοντας μὲ $\mathcal{B}'$ τὴ βάση, ποὺ προκύπτει μετὰ τὴν ἐπαναδιάταξη, ἔχομε

$$\mathcal{B}' = \{\underbrace{w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1d_1}}_{\in \, W_1}, \underbrace{w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2d_2}}_{\in \, W_2}, \dots \underbrace{w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kd_k}}_{\in \, W_k}\} \tag{4}$$

Ἄρα, ἂν κάποιο $v \in \mathcal{B}'$ ἀνήκει στὰ πρῶτα d_1 διανύσματα, τότε $f(v) = \lambda_1 v$· ἂν ἀνήκει στὰ ἑπόμενα d_2 διανύσματα, τότε $f(v) = \lambda_2 v$, κ.ο.κ καὶ ἂν ἀνήκει στὰ τελευταῖα d_k διανύσματα, τότε $f(v) = \lambda_k v$.
Συνεπῶς, ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}'$ εἶναι

$$A_{f/\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \tag{5}$$

ὅπου ἐννοεῖται ὅτι σὲ ὅλες τὶς θέσεις ἐκτὸς τῆς διαγωνίου τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακα εἶναι μηδέν. Ἄρα, τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ f εἶναι

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1)^{d_1}(X - \lambda_2)^{d_2} \cdots (X - \lambda_k)^{d_k} \tag{6}$$

[5] Ἤδη παρατηρήσαμε ὅτι $d_i \geq 1$.

(δεῖτε τὴν ἄσκηση 8). Ἀπὸ τὴν ἔκφραση αὐτὴ τοῦ $\chi_f(X)$ προκύπτει ἡ ἑξῆς σημαντικὴ πρόταση:

Πρόταση 4.5 *Ἂν ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε ὅλες οἱ ῥίζες τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου του $\chi_f(X)$ ἀνήκουν στὸ F.*

Ἄσκηση 8 *Δεῖξτε ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ πίνακα*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

εἶναι $(X-a)^3(X-b)(X-c)^2$.

Σκοπὸς μας στὰ παρακάτω εἶναι νὰ ἀποδείξομε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $d_1, d_2, \ldots, d_k$, ποὺ ἐμφανίζονται στὴν (5) εἶναι, ἀντιστοίχως, οἱ διαστάσεις τῶν ἰδιοχώρων $W_1, W_2, \ldots, W_k$. Γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτὸ θὰ χρειαστοῦμε κάποια ἐπιπλέον ἐργαλεῖα.

Ὁρισμός. Ἔστω $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_mX^m \in F[X]$ καὶ $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Ὁρίζομε τὸν τελεστὴ $p(f) \in \mathcal{L}(V, V)$ ὡς ἑξῆς:[6]

$$p(f) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 \cdot f + a_2 \cdot f^2 + \cdots + a_m \cdot f^m.$$

Δηλαδή, γιὰ κάθε $v \in V$,

$$p(f)(v) = a_0 \cdot v + a_1 \cdot f(v) + a_2 \cdot f^2(v) + \cdots + a_m \cdot f^m(v).$$

Παράδειγμα 1. Ἔστω $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ καὶ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ποὺ ὁρίζεται $f(x, y) = (x + y, 2x - y)$. Ἔστω $p(X) = -1 + 2X^2 + X^3$. Θὰ ὑπολογίσομε τὸν τελεστὴ $p(f)$.

Ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση $\{(1, 0), (0, 1)\}$ τοῦ $\mathbb{R}^2$ εἶναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ὑπολογίζομε $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ καὶ $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Ἄρα $f^2(x, y) = (3x, 3y)$ καὶ $f^3(x, y) = (3x + 3y, 6x - 3y)$, ὁπότε

$$\begin{aligned} p(f)(x, y) &= -(x, y) + 2f^2(x, y) + f^3(x, y) = -(x, y) + 2(3x, 3y) + (3x + 3y, 6x - 3y) \\ &= (8x + 3y, 6x + 2y). \end{aligned}$$

[6] Ὑπενθύμιση: Ὁ πολλαπλασιασμὸς στὴν ἄλγεβρα $\mathcal{L}(V, V)$ εἶναι ἡ σύνθεση ἀπεικονίσεων. Ἄρα, ὅταν γράφομε, π.χ. f^k ἐννοοῦμε $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k}$.

Παράδειγμα 2. Ἂν $p(X) \in F[X]$, $f \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in F$ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f καὶ $v \in V$ ἰδιοδιάνυσμα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λ, τότε $p(f)(v) = p(\lambda) \cdot v$.

Πράγματι, ἔστω $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_mX^m$, ὁπότε $p(f)(v) = a_0 \cdot v + a_1 \cdot f(v) + a_2 \cdot f^2(v) + \cdots + a_m \cdot f^m(v)$. Εἶναι $f(v) = \lambda v$, $f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$ κ.ο.κ., $f^k(v) = \lambda^k v$. Ἄρα,

$$\begin{aligned} p(f)(v) &= a_0 \cdot v + a_1 \cdot f(v) + a_2 \cdot f^2(v) + \cdots + a_m \cdot f^m(v) \\ &= a_0 \cdot v + a_1(\lambda v) + a_2(\lambda^2 v) + \cdots + a_m(\lambda^m v) \\ &= a_0 \cdot v + (a_1\lambda)v + (a_2\lambda^2)v + \cdots + (a_m\lambda^m)v = p(\lambda) \cdot v. \end{aligned}$$

Θὰ χρειαστοῦμε τὸ παρακάτω γενικὸ (ἀνεξάρτητο τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας) λῆμμα:

Λῆμμα 4.6 *Ἔστω $a_1, \ldots, a_k \in F$ διαφορετικὰ μεταξύ τους καὶ $b_1, \ldots, b_k \in F$ ὄχι ὅλα 0. Τότε ὑπάρχει πολυώνυμο $p(X) \in F[X]$ βαθμοῦ $\leq k-1$, τέτοιο ὥστε $p(a_i) = b_i$ γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, k$.*

Ἀπόδειξη Ἔστω $p(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_{k-1}X^{k-1}$. Θὰ δείξομε ὅτι μποροῦμε νὰ προσδιορίσομε κατάλληλα $c_0, \ldots, c_{k-1}$, ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύει $p(a_i) = b_i$ γιὰ ὅλα τὰ $i = 1, \ldots, k$. Ἡ συνθήκη $p(a_i) = b_i$ γράφεται, πιὸ ἀναλυτικά, $c_0 + c_1a_i + c_2a_i^2 + \cdots + c_{k-1}a_i^{k-1} = 0$ καὶ ἂν γράψομε τὶς k ἰσότητες, ποὺ προκύπτουν ὅταν $i = 1, 2, \ldots, k$, καταλήγομε στὴ σχές

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_k & a_k^2 & \ldots & a_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

τὴν ὁποία βλέπομε ὡς γραμμικὸ $k \times k$ μὴ ὁμογενὲς σύστημα[7] μὲ ἀγνώστους τοὺς $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$. Ἕνα τέτοιο σύστημα ἔχει, ὡς γνωστόν, λύση τότε καὶ μόνο τότε ἂν ἡ ὁρίζουσα τοῦ πίνακα συντελεστῶν εἶναι μὴ μηδενική. Στὴ συγκεκριμένη περίπτωση, ἡ ὁρίζουσα εἶναι τύπου Vandermonde, δηλαδή,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_k & a_k^2 & \ldots & a_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (a_j - a_i)\,.$$

Ἐπειδὴ τὰ $a_1, \ldots, a_k$ ἔχουν ὑποτεθεῖ διαφορετικά, ἡ ὁρίζουσα εἶναι μὴ μηδενική, ἄρα τὸ σύστημα ἔχει λύση· αὐτὸ ποὺ θέλαμε ν' ἀποδείξομε.

□

Χάρη στὸ λῆμμα αὐτὸ μποροῦμε ν' ἀποδείξομε τὴν παρακάτω σημαντικὴ πρόταση:

[7] Ἡ στήλη στὸ δεξιὸ μέλος εἶναι μὴ μηδενική.

Πρόταση 4.7 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V,V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ εἶναι διαφορετικὲς ἰδιοτιμὲς τοῦ f καὶ $W_1, \dots, W_k$ οἱ ἀντίστοιχοι ἰδιόχωροι.*

(α′) *Ἂν $w_1 + \cdots + w_k = 0$, ὅπου $w_i \in W_i$ ($i = 1, \dots, k$), τότε, ὑποχρεωτικά, ὅλα τὰ w_i εἶναι μηδενικὰ διανύσματα.*

(β′) *Ἔστω ὅτι γιὰ $i = 1, \dots, k$ τὸ μὴ κενὸ ὑποσύνολο S_i τοῦ W_i εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητο, τότε τὸ $\bigcup_{i=1}^k S_i$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητο ὑποσύνολο τοῦ V.*

(γ′) $\dim(W_1) + \cdots + \dim(W_k) \le n$.

Ἀπόδειξη *(α′)* Γιὰ κάθε $i = 1, \dots, k$, τὸ Λῆμμα 4.6 ἐξασφαλίζει ὅτι, ὑπάρχει πολυώνυμο $p_i(X) \in F[X]$, τέτοιο ὥστε

$$p_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{ἂν } j = i \\ 0 & \text{ἂν } j \neq i \end{cases}.$$

Μέσῳ κάθε τέτοιου πολυωνύμου p_i ὁρίζεται καὶ ἕνας τελεστὴς $p_i(f)$, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ στὴ σελίδα 11. Πῶς δρᾶ ὁ τελεστὴς $p_i(f)$ στὰ ἰδιοδιανύσματα w_j; Ἀπὸ τὸ συμπέρασμα τοῦ Παραδείγματος 2 τῆς σελίδας 12, ἔχομε

$$p_i(f)(w_j) = p_i(\lambda_j) \cdot w_j = \begin{cases} w_j & \text{ἂν } j = i \\ 0 & \text{ἂν } j \neq i. \end{cases}$$

Ἄρα, ἂν γιὰ κάθε $i = 1, \dots, k$ ἐφαρμόσομε τὸν τελεστὴ $p_i(f)$ στὴ σχέση $w_1 + \cdots + w_k = 0$, θὰ πάρομε $w_i = 0$, ὁπότε ὅλα τὰ w_i εἶναι μηδενικά.

(β′) Γιὰ $i = 1, \dots, k$ ἔστω $S_i = \{w_{i1}, w_{i2}, \dots\}$ (πεπερασμένο πλῆθος στοιχείων). Θεωροῦμε μιὰ σχέση γραμμικῆς ἐξάρτησης τοῦ συνόλου $\cup_{i=1}^k S_i$:

$$\underbrace{(c_{11}w_{11} + c_{12}w_{12} + \cdots)}_{w_1 \in W_1} + \underbrace{(c_{21}w_{21} + c_{22}w_{22} + \cdots)}_{w_2 \in W_2} + \cdots + \underbrace{(c_{k1}w_{k1} + c_{k2}w_{k2} + \cdots)}_{w_k \in W_k} = 0.$$

Ἀπὸ τὸ (α′) συμπεραίνομε ὅτι, γιὰ κάθε $i = 1, \dots, k$ ἰσχύει $w_i = 0$, ποὺ σημαίνει $c_{i1}w_{i1} + c_{i2}w_{i2} + \cdots = 0$. Ὅμως τὰ $w_{i1}, w_{i2}, \dots$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἄρα ὅλοι οἱ συντελεστὲς $c_{i1}, c_{i2}, \dots$ εἶναι μηδενικοί.

(γ′) Ἄμεση ἐφαρμογὴ τοῦ (β′), ἂν ὡς S_i πάρομε μιὰ βάση τοῦ W_i.

□

Ὑποθέτομε τώρα ὅτι ὁ f εἶναι διαγωνιοποιήσιμος καὶ θεωροῦμε τὴ βάση $\mathcal{B}'$ ποὺ δίνεται στὴν (4). Σκοπός μας εἶναι νὰ δείξομε ὅτι $d_i = \dim(W_i)$ γιὰ κάθε $i = 1, \dots, k$.

Κατ' ἀρχάς, $d_i \le \dim(W_i)$, διότι τὰ διανύσματα $w_{i1}, \dots, w_{id_i}$ τοῦ W_i εἶναι ἀνήκουν σὲ βάση τοῦ V, ἄρα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Συνεπῶς

$$n = \sum_{i=1}^k d_i \le \sum_{i=1}^k \dim(W_i) \overset{(\gamma')}{\le} n.$$

Ἀν γιὰ κάποιο j ἦταν $d_j < \dim(W_j)$, τότε, στὴν παραπάνω σχέση, ἡ ἀριστερὴ ἀνισότητα θὰ ἦταν γνήσια, ἄρα θὰ συμπεραίναμε $n < n$. Συνεπῶς $d_i = \dim(W_i)$ γιὰ κάθε $i = 1, \dots, k$.

□

Τὰ προηγούμενα συμπεράσματά μας συνοψίζονται στὸ ἑξῆς σημαντικὸ θέωρημα:

Θεώρημα 4.8 *Ἔστω ὁ F-διανυσματικὸς χῶρος V διαστάσεως n καὶ ὁ διαγωνιοποιήσιμος τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Τότε:*

1. *Τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο $\chi_f(X)$ τοῦ f δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση (6), ὅπου $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ εἶναι ὅλες οἱ διαφορετικὲς ἰδιοτιμὲς τοῦ f. Ἀν μὲ W_i συμβολίσομε τὸν ἰδιόχωρο, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ_i ($i = 1, \dots, k$), τότε, γιὰ τοὺς ἐκθέτες d_i ποὺ ἐμφανίζονται στὴ σχέση (6), ἰσχύει $d_i = \dim(W_i)$.*

2. *Μία βάση $\mathcal{B}'$, ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὁ πίνακας τοῦ f εἶναι διαγώνιος, δίνεται στὴν (4), ὅπου τὰ d_1 πρῶτα διανύσματα τῆς $\mathcal{B}'$ εἶναι βάση τοῦ W_1, τὰ ἑπόμενα d_2 διανύσματα εἶναι βάση τοῦ W_2 κ.ο.κ. καὶ τὰ τελευταῖα d_k διανύσματα εἶναι βάση τοῦ W_k. Ὁ διαγώνιος πίνακας δίνεται ἀπὸ τὴν (5).*

Τώρα θὰ ἀποδείξομε καὶ τὸ ἀντίστροφο θεώρημα.

Θεώρημα 4.9 *Ἔστω ὁ F-διανυσματικὸς χῶρος V διαστάσεως n καὶ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V, V)$, τοῦ ὁποίου τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο $\chi_f(X)$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο πρωτοβαθμίων πολυωνύμων τοῦ $F[X]$, ἄρα ἔχει ὅλες τὶς ῥίζες του μέσα στὸ F[8]. Ἀν $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ εἶναι ὅλες οἱ διαφορετικὲς ῥίζες τοῦ $\chi_f(X)$, τότε, αὐτὲς ἀκριβῶς εἶναι καὶ ὅλες οἱ διαφορετικὲς ἰδιοτιμὲς τοῦ f.*

Ἔστω W_i ὁ ἰδιόχωρος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ_i ($i = 1, \dots, k$).
Ἀν $\dim(W_1) + \cdots + \dim(W_k) = n$, τότε ὁ f εἶναι διαγωνιοποιήσιμος καὶ ἰσχύει τὸ (2) τοῦ Θεωρήματος 4.8. Στὴν περίπτωση αὐτή, ἂν $\mathcal{B}$ εἶναι ὁποιαδήποτε βάση τοῦ V καὶ P εἶναι ὁ πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴ $\mathcal{B}'$ στὴ $\mathcal{B}$, τότε

$$A_{f/\mathcal{B}} = PDP^{-1},$$

ὅπου D εἶναι ὁ διαγώνιος πίνακας στὸ δεξιὸ μέλος τῆς (5).

Ἀπόδειξη Ἀπὸ τὸν Πρόταση-Ὁρισμὸ 4.3, ξέρομε ὅτι τὰ ἕνα στοιχεῖο $\lambda \in F$ εἶναι ῥίζα τοῦ $\chi_f(X)$ ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f. Ἀπὸ αὐτὸ προκύπτει ἀμέσως ὁ πρῶτος ἰσχυρισμὸς τοῦ θεωρήματος.

[8] Ἐννοεῖται ὅτι κάποιες ἀπὸ αὐτὲς δὲν ἀποκλείεται νὰ ἔχουν πολλαπλότητα > 1.

Ἄν θέσομε $\dim(W_i) = d_i$ ($i = 1, \ldots, k$) καί, γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, k$ θεωρήσομε μία βάση $w_{i1}, \ldots, w_{id_i}$ τοῦ W_i, τότε ἡ ἕνωση τῶν k αὐτῶν βάσεων εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητο σύνολο, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 4.7 (β΄), ἀποτελούμενο ἀπὸ n διαφορετικὰ διανύσματα τοῦ V. Ἄρα, τὸ σύνολο

$$\mathcal{B}' = \{\underbrace{w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1d_1}}_{\text{βάση τοῦ } W_1}, \underbrace{w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2d_2}}_{\text{βάση τοῦ } W_2}, \ \ldots \ \underbrace{w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{kd_k}}_{\text{βάση τοῦ } W_k}\}$$

εἶναι μία βάση τοῦ V. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}'$ εἶναι αὐτὸς ποὺ δίνεται στὴν (5), δηλαδή, $A_{f/\mathcal{B}'} = D$.

Τέλος, ἔστω $\mathcal{B}$ μιὰ ὁποιαδήποτε βάση τοῦ V καὶ P ὁ πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴν παραπάνω βάση $\mathcal{B}'$ στὴ $\mathcal{B}$. Σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 3.3, ἰσχύει $A_{f/\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P$. Ὅμως, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, $A_{f/\mathcal{B}'} = D$, ἄρα $D = P^{-1}A_{f/\mathcal{B}}P$, δηλαδή, $A_{f/\mathcal{B}} = PDP^{-1}$.

□

Γιὰ τὶς ἀσκήσεις, χρήσιμη εἶναι ἡ ἑξῆς ἁπλῆ πρόταση:

Πρόταση 4.10 *Ἔστω $\mathcal{B}$ μιὰ ὁποιαδήποτε βάση τοῦ V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ καὶ λ ἰδιοτιμὴ τοῦ f. Τότε ἰσχύει ἡ ἑξῆς ἰσοδυναμία:*[9]

$$v \in \textit{ἰδιόχωρο τῆς } \lambda \quad \Leftrightarrow \quad [v]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{N}(A_{f/\mathcal{B}} - \lambda I).$$

Ἀπόδειξη

$$\begin{aligned} v \in \text{ἰδιόχωρο τῆς } \lambda &\Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow [f(v)]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow A_{f/\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}} \\ &\Leftrightarrow (A_{f/\mathcal{B}} - \lambda I)[v]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{N}(A_{f/\mathcal{B}} - \lambda I). \end{aligned}$$

□

Χρήσιμο σχόλιο. Ἄν $V = F^n$ καὶ $\mathcal{B}$ εἶναι ἡ στάνταρ βάση, τότε κάθε διάνυσμα $v \in V$ ταυτίζεται μὲ τὶς συντεταγμένες του ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$, ἄρα $v = [v]_{\mathcal{B}}$. Ἔτσι, ἡ παραπάνω πρόταση μᾶς λέει ὅτι, σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση, ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

$$v \in \text{ἰδιόχωρο τῆς } \lambda \quad \Leftrightarrow \quad v \in \mathcal{N}(A_{f/\mathcal{B}} - \lambda I).$$

Ἄσκηση 9 *Ἔστω ὁ $\mathbb{R}$-διανυσματικὸς χῶρος $\mathbb{R}^3$. Σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις δίδεται κάποιος τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ καὶ ζητοῦνται τὰ ἑξῆς:*
(α΄) Νὰ ὑπολογῖστε τὸν πίνακα τοῦ τελεστὴ f ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση.
(β΄) Διαγωνιοποιεῖται ὁ τελεστὴς f;
(γ΄) Στὴν περίπτωση ποὺ ἡ ἀπάντησή σας στὸ (β΄) εἶναι καταφατική, ὑπολογῖστε μία βάση $\mathcal{B}'$ τοῦ V, ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὁ f ἔχει διαγώνιο πίνακα D (τὸν ὁποῖο, φυσικά, θὰ ὑπολογίσετε), καθὼς καὶ πίνακα P, τέτοιον ὥστε $P^{-1}AP = D$.

[9] Ὑπενθύμιση συμβολισμοῦ: Ἄν M εἶναι τετραγωνικὸς πίνακας, τότε $\mathcal{N}(M)$ συμβολίζει τὸν μηδενόχωρο τοῦ M.

1. $f(x, y, z) = (x + y, y, z)$.

2. $f(x, y, z) = (y + 2z, 2x - y - 4z, -2x + 2y + 5z)$.

3. $f(x, y, z) = (-2x + 4y + 6z, 2x - y - 4z, -2x + 2y + 5z)$.

Ἄσκηση 10 *Ἔστω ὁ F-διανυσματικὸς χῶρος F^2. Σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις δίδεται κάποιος τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(F^2, F^2)$ καὶ ζητοῦνται τὰ ἑξῆς:*
(α΄) Νὰ ὑπολογῖστε τὸν πίνακα τοῦ τελεστὴ f ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση.
(β΄) Διαγωνιοποιεῖται ὁ τελεστὴς f;
(γ΄) Στὴν περίπτωση ποὺ ἡ ἀπάντησή σας στὸ (β΄) εἶναι καταφατική, ὑπολογῖστε μία βάση $\mathcal{B}'$ τοῦ F^2, ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὁ f ἔχει διαγώνιο πίνακα D (τὸν ὁποῖο, φυσικά, θὰ ὑπολογίσετε), καθὼς καὶ πίνακα P, τέτοιον ὥστε $P^{-1}AP = D$.

1. $F = \mathbb{C}$, $f(x, y) = ((1 + i)x + y, y)$.

2. $F = \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + y, y)$.

3. $F = \mathbb{C}$, $f(x, y) = (x + y, y)$.

4. $F = \mathbb{R}$, $f(x, y) = (2x + 5y, -x - 2y)$.

5. $F = \mathbb{C}$, $f(x, y) = (2x + 5y, -x - 2y)$.

Ἄσκηση 11 *Ἔστω ὁ $\mathbb{R}$-διανυσματικὸς χῶρος $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ (δηλαδή, ὁ χῶρος τῶν 2×2 πινάκων πραγματικῶν ἀριθμῶν) καὶ $f \in \mathcal{L}(V, V)$, ποὺ ὁρίζεται:*

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + 2c & b \\ c + 2d & d \end{pmatrix}.$$

Ἔστω $\mathcal{B}$ ἡ βάση

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα τοῦ f ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$.*
   Ἀπάντηση: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. *Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ f ἰσοῦται μὲ $(X - 1)^4$.*
   Ὑπόδειξη: Εἶναι εὔκολος ὁ ὑπολογισμός, λόγῳ τῆς μορφῆς τοῦ A. Αὐτὸ που θὰ βρεῖτε εἶναι τὸ πολυώνυμο $X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$, τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(X - 1)^4$.

3. *Ὑπολογῖστε μιὰ βάση γιὰ τὸν ἰδιόχωρο, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ* 1. *(Φυσικά, τὰ στοιχεῖα τῆς βάσης αὐτῆς εἶναι* 2×2 *πίνακες).*

   Ὑπόδειξη: Πρέπει νὰ βρεῖτε ὅτι ἡ διάσταση τοῦ ἰδιοχώρου εἶναι 2. *Ἐπειδή, γενικά, ἡ βάση ἑνὸς διανυσματικοῦ χώρου δὲν εἶναι μονοσήμαντη, δὲν εἶναι σκόπιμο νὰ σᾶς δώσω μιὰ βάση.*

4. *Διαγωνιοποιεῖται ὁ* f;

   Ἀπάντηση: Ὄχι.

5. *Ἔστω τὸ πολυώνυμο* $p(X) = 2 + 3X - X^2$. *Ποιὸς εἶναι ὁ πίνακας τοῦ τελεστὴ* $p(f)$ *ὡς πρὸς τὴ* $\mathcal{B}$; *Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα* $p(f)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   Ἀπάντηση: Ὁ πίνακας τοῦ $p(f)$ *εἶναι* $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   $p(f)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + b + 2c - 4d & 4b \\ 4c + 2d & 4d \end{pmatrix}$.

Ἄσκηση 12 *θεωρῆστε τὸν* $\mathbb{F}$*-διανυσματικὸ χῶρο* $V = \mathbb{F}^{2\times 2}$ *(ὁ χῶρος τῶν* 2×2 *πινάκων μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ σῶμα* F*) καὶ* $\mathcal{B}$ *τὴ βάση τοῦ* V, *τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα εἶναι*

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στὰ παρακάτω, $F = \mathbb{R}$.

Ἔστω ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V, V)$, *τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ* $\mathcal{B}$ *εἶναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Ὑπολογῖστε τὸν “τῦπο” τῆς* f. *Δηλαδή, ποιὸς πίνακας εἶναι ὁ* $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

   Ἀπάντηση: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b \\ c + 2d & 2a + d \end{pmatrix}$.

2. *Δεῖξτε ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ* f *ἰσοῦται μὲ* $(X-1)(X-3)(X^2+3)$.

3. *Εἶναι ὁ* f *διαγωνιοποιήσιμος;*

   Ἀπάντηση: Ὄχι.

4. *Ἔστω τὸ πολυώνυμο* $p(X) = 2 + 3X - X^2$. *Ποιὸς εἶναι ὁ πίνακας τοῦ τελεστὴ* $p(f)$ *ὡς πρὸς τὴ* $\mathcal{B}$; *Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα* $p(f)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ἀπάντηση: Ὁ πίνακας τοῦ $p(f)$ εἶναι $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

$p(f)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+2c-4d & 4b \\ -4a+4c+2d & 2a-4c+4d \end{pmatrix}$.

Ἄσκηση 13 *Νὰ ἐπαναλάβετε τὴν προηγούμενη ἄσκηση, ἀλλὰ τώρα μὲ $F = \mathbb{C}$. Τί θὰ ἀλλάξει ὡς πρὸς τὰ ζητήματα (1), (2), (3);*

Ἄσκηση 14 *Ἔστω ὁ $\mathbb{R}$-διανυσματικὸς χῶρος $V = \mathbb{R}_2[X]$ (ὁ διανυσματικὸς χῶρος τῶν πολυωνύμων μὲ πραγματικοὺς συντελεστές, βαθμοῦ ≤ 2) καὶ ἡ βάση $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ τοῦ V. Ἔστω ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V, V)$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$ εἶναι*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. *Ὑπολογῖστε τὸ πολυώνυμο $f(a_0 + a_1X + a_2X^2)$.*
   Ἀπάντηση: $(5a_0 - 6a_1 - 6a_2) + (-a_0 + 4a_1 + 2a_2)X + (3a_0 - 6a_1 - 4a_2)X^2$.
2. *Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ f ἰσοῦται μὲ $(X-1)(X-2)^2$.*
3. *Ὑπολογῖστε τὸν ἰδιόχωρο, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἰδιοτιμὲς τοῦ f καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ f διαγωνιοποιεῖται. Ὑπολογῖστε βάση $\mathcal{B}'$ ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὁ πίνακας τοῦ f εἶναι διαγώνιος.*
4. *Ὑπολογῖστε πίνακα P, τέτοιον ὥστε ὁ πίνακας $P^{-1}AP$ νὰ εἶναι διαγώνιος.*

5 Χῶροι μὲ ἐσωτερικὸ γινόμενο

Σ' αὐτὴ τὴν ἑνότητα, V εἶναι F-διανυσματικὸς χῶρος, ὅπου $F = \mathbb{R}$ ἢ $\mathbb{C}$, διάστασης n, ἐφοδιασμένος μὲ ἐσωτερικὸ γινόμενο.
Τὸ ἐσωτερικὸ γινόμενο τῶν $u, v \in V$ συμβολίζεται $\langle u, v\rangle$.

Γιὰ τὴ βασικὴ θεωρία, βλ. [1, §§ 5.1, 5.2] ἢ [2, §§ 5.1, 5.2].

Γιὰ τὸν ἀλγόριθμο ὀρθογωνιοποίησης-ὀρθοκανονικοποίησης τῶν Gram-Schmidt βλ. [1, Θεώρημα 4.1.11] ἢ [2, Θεώρημα 4.1.11]

Ἄσκηση 15 *Σ' αὐτὴ τὴν ἄσκηση τὰ διανύσματα τοῦ $\mathbb{R}^n$ θὰ τὰ θεωροῦμε ὡς $n \times 1$ στῆλες. Πρὶν προχωρήσετε, παρατηρῆστε ὅτι, γιὰ κάθε διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ τοῦ $\mathbb{R}^n$ (ἄρα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω σύμβαση), ἡ διάσταση τοῦ πίνακα $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} M\mathbf{x}$ εἶναι 1×1, ἄρα αὐτὸς ὁ πίνακας εἶναι ἁπλῶς ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.*

(α΄) Ἔστω $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικὸς πίνακας, τέτοιος ὥστε, γιὰ κάθε μὴ μηδενικὸ $\mathbf{x} \in R^n$ νὰ ἰσχύει $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} M\mathbf{x} > 0$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ὁρίσομε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} M\mathbf{x},$$

τότε ἡ συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ὁρίζει ἕνα ἐσωτερικὸ γινόμενο γιὰ τὸν $\mathbb{R}^n$.

(β΄) Βασισμένοι στὸ (α΄), ἀποδεῖξτε ὅτι, μέσῳ τοῦ πίνακα $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ὁρίζεται ἕνα ἐσωτερικὸ γινόμενο στὸν $\mathbb{R}^2$. Ποιὰ εἶναι τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων $(1, 1)$ καὶ $(3, -4)$; Δεῖξτε ὅτι τὰ διανύσματα $(-5, 1)$ καὶ $(-5, 3)$ εἶναι κάθετα.

(γ΄) Θεωρῆστε τώρα τὸν $\mathbb{R}^2$ ἐφοδιασμένο μὲ τὸ σύνηθες ἐσωτερικὸ γινόμενο (αὐτὸ ποὺ μαθαίνομε ἤδη ἀπὸ τὰ σχολικά μας χρόνια). Ποιὰ εἶναι τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων $(1, 1)$ καὶ $(3, -4)$; Εἶναι τὰ διανύσματα $(-5, 1)$ καὶ $(-5, 3)$ κάθετα; Συγκρίνετε τὶς ἀπαντήσεις σας μὲ αὐτὲς τοῦ ἐρωτήματος (β΄).

Ἄσκηση 16 *Ἔστω ὅτι οἱ στῆλες τοῦ $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ἀποτελοῦν ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ $\mathbb{R}^n$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $P^{\mathrm{T}} P = I_n$, ἄρα, στὴν περίπτωση αὐτή, $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$.*

Ἄσκηση 17 *Ἔστω ὅτι $v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα τοῦ V καὶ τὰ $v_1, \ldots, v_k$ εἶναι ἀνὰ δύο κάθετα μεταξύ τους. Δεῖξτε ὅτι, ἂν $w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_m$ εἶναι τὰ ὀρθογώνια διανύσματα ποὺ παίρνομε ἐφαρμόζοντας τὸν ἀλγόριθμο Gram-Schmidt στὰ $v_1, \ldots, v_m$, τότε $w_i = v_i$ γιὰ $i = 1, \ldots, k$.*

Ἄσκηση 18 *Ἔστω $w_1, \ldots, w_n$ ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V.*

(α΄) Ἂν $u = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$, τότε $\lambda_i = \langle u, w_i \rangle$.

(β΄) Ἂν $u = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$ καὶ $v = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_n w_n$, τότε $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\mu}_i$.

Θεώρημα 5.1 *Γιὰ κάθε τελεστὴ $f \in \mathcal{L}(V, V)$ ὑπάρχει ἕνας ἀκριβῶς $f^* \in \mathcal{L}(V, V)$, τέτοιος ὥστε $\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle$ γιὰ ὅλα τὰ $u, v \in V$.*

Ἀπόδειξη Ἔστω $w_1, \ldots, w_n$ ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V. Ὁρίζομε τὴν ἀπεικόνιση $f^* : V \to V$ ὡς ἑξῆς:

$$f^*(v) = \sum_{i=1}^n \overline{\langle f(w_i), v \rangle} \cdot w_i.$$

Ἡ f^* εἶναι γραμμικὴ ἀπεικόνιση (ἄσκηση).

Ἔστω τώρα ὁποιαδήποτε $u, v \in V$ καὶ ἂς θέσομε $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς f^* καὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου, ὑπολογίζομε

$$\langle u, f^*(v) \rangle = \langle u, \sum_{i=1}^n \overline{\langle f(w_i), v \rangle} \cdot w_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, \overline{\langle f(w_i), v \rangle} \cdot w_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle f(w_i), v \rangle \langle u, w_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle f(w_i), v \rangle \lambda_i.$$

Ἐπίσης,

$$\langle f(u), v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(w_i), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \lambda_i f(w_i), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f(w_i), v\rangle.$$

Τὰ δεξιώτερα μέλη τῶν δύο παραπάνω σχέσεων εἶναι ἴσα, ἄρα $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle$.

Τώρα θὰ δείξομε τὴ μοναδικότητα τῆς f^*. Ἔστω ὅτι καὶ γιὰ τὴν $f' \in \mathcal{L}(V, V)$ ἰσχύει $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f'(v)\rangle$ γιὰ ὅλα τὰ $u, v \in V$. Θὰ ἀποδείξομε ὅτι, τότε, $f' = f^*$. Αὐτὸ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ν' ἀποδείξομε ὅτι $f'(w_i) = f^*(w_i)$ γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, n$. Ἂν θέσομε

$$f^*(w_i) = \lambda_{i1} w_1 + \cdots + \lambda_{in} w_n, \quad f'(w_i) = \mu_{i1} w_1 + \cdots + \mu_{in} w_n,$$

τότε ἔχομε νὰ δείξομε ὅτι $\lambda_{ij} = \mu_{ij}$ γιὰ κάθε j. Αὐτὸ ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

$$\langle w_j, f'(w_i)\rangle = \langle w_j, \mu_{i1} w_1 + \cdots + \mu_{ij} w_j + \cdots + \mu_{in} w_n\rangle = \langle w_j, \mu_{ij} w_j\rangle = \overline{\mu_{ij}} \cdot \langle w_j, w_j\rangle = \overline{\mu_{ij}} \cdot \|w_j\| = \overline{\mu_{ij}},$$

ἄρα $\mu_{ij} = \overline{\langle w_j f'(w_i)\rangle} = \overline{\langle f(w_j), w_i\rangle}$. Ἐντελῶς ἀνάλογα, μὲ τὸ f^* στὴ θέση τοῦ f', καταλήγομε στὴ σχέση $\lambda_{ij} = \overline{\langle f(w_j), w_i\rangle}$, ἄρα $\lambda_{ij} = \mu_{ij}$.

□

Ὁρισμός. Δοθέντος τοῦ $f \in \mathcal{L}(V, V)$, ὁ μοναδικὸς τελεστὴς $f^* \in \mathcal{L}(V, V)$, ποὺ περιγράφεται στὸ Θεώρημα 5.1, λέγεται συζυγής, ἢ προσαρτημένος, ἢ δυϊκὸς τελεστὴς τοῦ f.[10]

Ὁ f λέγεται:

$$\begin{array}{c} \text{κανονικός (normal)} \overset{\textit{ορσ}}{\iff} f^* f = f f^*. \\ \text{ἑρμιτιανός (hermitian)} \overset{\textit{ορσ}}{\iff} f^* = f. \\ \text{μοναδιαῖος (unitary)} \overset{\textit{ορσ}}{\iff} f^* = f^{-1}. \end{array}$$

Πρόταση 5.2 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V, V)$, f^* ο συζυγὴς τελεστής του καὶ A_f, A_{f^*} οἱ πίνακες τῶν f, f^*, ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς μία ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V. Τότε,*

$$A_{f^*} = (\overline{A_f})^{\mathrm{T}}$$

Ἀπόδειξη Ἔστω $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ ἡ ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V, ὡς πρὸς τὴν ὁποία οἱ πίνακες τῶν f καὶ f^* εἶναι A καὶ A_{f^*}. Γιὰ $i, j = 1, \ldots, n$, ἔστω

$$\begin{aligned} f(w_i) &= \lambda_{1i} w_1 + \cdots + \lambda_{ji} w_j + \cdots + \lambda_{ni} w_n \\ f^*(w_j) &= \mu_{1j} w_1 + \cdots + \mu_{ij} w_i + \cdots + \mu_{nj} w_n \end{aligned}$$

[10]Ἀγγλικὴ ὁρολογία: adjoint operator.

Οἱ συντελεστὲς λ στὴν πρώτη σχέση εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς i-στήλης τοῦ A_f, ἄρα, τὸ λ_{ji} εἶναι τὸ (j,i)-στοιχεῖο τοῦ A_f. Ἐντελῶς ἀνάλογα, τὸ μ_{ij} εἶναι τὸ (i,j)-στοιχεῖο τοῦ A_{f^*}. Ὅμως, ἀπὸ τὴν ἄσκηση 18 (α′), $\lambda_{ji} = \langle f(w_i), w_j\rangle$ καὶ $\mu_{ij} = \langle f^*(w_j), w_i\rangle$, ὁπότε,

$$\mu_{ij} = \langle f^*(w_j), w_i\rangle = \overline{\langle w_i, f^*(w_j)\rangle} = \overline{\langle f(w_i), w_j\rangle} = \overline{\lambda_{ji}}.$$

Αὐτό, μὲ λόγια, λέει ὅτι, τὸ (i,j)-στοιχεῖο τοῦ A_{f^*} ἰσοῦται μὲ τὸ μιγαδικὸ συζυγὲς τοῦ (j,i)-στοιχείου τοῦ A_f, ἄρα $A_{f^*} = (\overline{A_f})^{\mathrm{T}}$.

□

Πόρισμα 5.3 *Γιὰ κάθε $f \in \mathcal{L}(V,V)$ ἰσχύει $(f^*)^* = f$.*

Ἀπόδειξη Ἔστω $(f^*)^* = f'$ καὶ $\mathcal{B}$ μιὰ ὁποιαδήποτε ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V, ὡς πρὸς τὴν ὁποία θὰ θεωροῦμε τοὺς πίνακες A τῶν διαφόρων τελεστῶν παρακάτω. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 5.2, $A_{f^*} = (\overline{A_f})^{\mathrm{T}}$. Παίρνοντας σ' αὐτὴ τὴ σχέση ἀνάστροφους πίνακες, ἔχομε$A_{f^*}^{\mathrm{T}} = \overline{A_f}$, σχέση ποὺ θὰ χρησιμοποιήσομε λίγο παρακάτω. Ἀπὸ τὴν ἄλλη, ἐφαρμόζοντας τὴν Πρόταση 5.2 μὲ τὸν f^* στὴ θέση τοῦ f, ἔχομε

$$A_{f'} = A_{(f^*)^*} = (\overline{A_{f^*}})^{\mathrm{T}} = \overline{(A_{f^*}^{\mathrm{T}})} = \overline{\left(\overline{A_f}\right)} = A_f.$$

Ἀφοῦ οἱ f' καὶ f ἔχουν ἴσους πίνακες ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$, ἕπεται ὅτι $f' = f$.

□

Πόρισμα 5.4 (α′) *$\lambda \in F$ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f ἂν καὶ μόνο ἂν $\overline{\lambda}$ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*.*
(β′) *Ἂν ὁ f εἶναι κανονικὸς καὶ λ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f, ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὸ (α′), $\overline{\lambda}$ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*, τότε, στὶς ἰδιοτιμὲς λ καὶ $\overline{\lambda}$ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἴδιος ἰδιόχωρος.*

Ἀπόδειξη *(α′)* Ἔστω A_f καὶ A_{f^*} οἱ πίνακες τῶν f καὶ f^* ὡς πρὸς μιὰ ὀρθοκανονικὴ βάση. Τότε,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ } f &\Leftrightarrow |A_f - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \overline{|A_f - \lambda I|} = 0 \Leftrightarrow |\overline{A_f} - \overline{\lambda} I| = 0 \\ &\Leftrightarrow |(\overline{A_f} - \overline{\lambda} I)^{\mathrm{T}}| = 0 \Leftrightarrow |(\overline{A_f})^{\mathrm{T}} - \overline{\lambda} I^{\mathrm{T}})| = 0 \Leftrightarrow |A_{f^*} - \overline{\lambda} I| = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda} \text{ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ } f^* \end{aligned}$$

(β′) Ἔστω τώρα ὅτι ὁ f εἶναι κανονικὸς τελεστής, λ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f καὶ W ὁ ἰδιόχωρος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λ. Ἀπὸ τὸ (α′) ξέρομε ὅτι $\overline{\lambda}$ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*. Ἂν W εἶναι ὁ ἰδιόχωρος τοῦ f, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λ, θὰ δείξομε ὅτι ὁ W εἶναι ἐπίσης ἰδιόχωρος τοῦ f^*, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ $\overline{\lambda}$. Θὰ δείξομε πρῶτα ὅτι κάθε $v \in W$ εἶναι ἰδιοδιάνυσμα τοῦ f^*, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ $\overline{\lambda}$, δηλαδή, $f^*(v) = \overline{\lambda} v$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \| f^*(v) - \overline{\lambda} v \|^2 &= \langle f^*(v) - \overline{\lambda} v, f^*(v) - \overline{\lambda} v\rangle = \langle f^*(v), f^*(v)\rangle - \overline{\lambda}\langle v, f^*(v)\rangle \\ &= -\lambda\langle f^*(v), v\rangle + \langle \overline{\lambda} v, \overline{\lambda} v\rangle. \end{aligned} \tag{7}$$

Ὑπολογίζομε ἕναν-ἕναν τοὺς ὅρους τοῦ δεξιώτερου μέλους. Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ $\langle f^*(v), f^*(v)\rangle$ θὰ λάβομε ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ f εἶναι κανονικός, ὁπότε $f * f = ff^*$:

$$\begin{aligned}\langle f^*(v), f^*(v)\rangle &= \langle ff^*(v), v\rangle = \langle f^*(f(v)), v\rangle = \langle f(v), (f^*)^*(v)\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle \\ &= \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \parallel v \parallel^2 .\end{aligned}$$

$$-\overline{\lambda}\langle v, f^*(v)\rangle = -\overline{\lambda}\langle f(v), v\rangle = -\overline{\lambda}\langle \lambda v, v\rangle = -\overline{\lambda}\lambda\langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \parallel v \parallel^2 .$$

$$-\lambda\langle f^*(v), v\rangle = -\lambda\langle v, (f^*)^*(v)\rangle = -\lambda\langle v, f(v)\rangle = -\lambda\langle v, \lambda v\rangle = -\lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \parallel v \parallel^2 .$$

$$\langle \overline{\lambda} v, \overline{\lambda} v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \parallel v \parallel^2 .$$

Ἀντικαθιστώντας στὴ (7) βρίσκομε ἀμέσως ὅτι $\parallel f^*(v) - \overline{\lambda} v \parallel = 0$, ἄρα $f^*(v) = \overline{\lambda} v$, αὐτό, δηλαδή, ποὺ εἴχαμε ἰσχυριστεῖ.

Μένει νὰ δείξομε καὶ τὸ ἀντίστροφο: Ἂν τὸ $v' \in V$ εἶναι ἰδιοδιάνυσμα τοῦ f^*, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ $\overline{\lambda}$ τοῦ f^*, τότε τὸ v' εἶναι καὶ ἰδιοδιάνυσμα τοῦ f, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ τοῦ f. Παρατηρῆστε ὅτι, αὐτὸ ποὺ ἀποδείξαμε παραπάνω εἶναι ὅτι, ἂν $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\lambda \in F$ καὶ $f(v) = \lambda v$ τότε $f^*(v) = \overline{\lambda} v$. Ἂν βάλομε στὴ θέση τοῦ f τὸν f^*, στὴ θέση τοῦ λ τὸ $\overline{\lambda}$ καὶ στὴ θέση τοῦ v τὸ v', συμπεραίνομε ὅτι, ἀφοῦ $f^*(v') = \overline{\lambda} v'$, θὰ ἰσχύει ὅτι καὶ $(f^*)^*(v') = \overline{(\overline{\lambda})} v'$, δηλαδή, $f(v') = \lambda v'$.

□

Πόρισμα 5.5 *Οἱ ἰδιοτιμὲς ἑνὸς τετραγωνικοῦ πραγματικοῦ συμμετρικοῦ πίνακα εἶναι ὅλες πραγματικές.*

Ἀπόδειξη Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικὸς καὶ f ἐκεῖνος ὁ τελεστὴς τοῦ $\in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴν στάνταρ βάση τοῦ $\mathbb{C}^n$ εἶναι ὁ A (πρβλ. Θεώρημα 1.2). Γιὰ τὸν συζυγῆ τελεστὴ f^* τοῦ f ἰσχύει (Πρόταση 5.2) $A_{f^*} = (\overline{A})^{\mathrm{T}}$. Καθὼς ὁ A εἶναι πραγματικὸς καὶ συμμετρικός, ἕπεται ὅτι $A_{f^*} = A$, ἄρα $f^* = f$· εἰδικώτερα, ὁ f εἶναι κανονικὸς τελεστής. Ἔστω τώρα λ μιὰ ἰδιοτιμὴ τοῦ f καὶ $v \in \mathbb{C}^3$ ἕνα ὁποιοδήποτε μὴ μηδενικὸ ἰδιοδιάνυσμα τοῦ f, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λ. Βάσει τοῦ Πορίσματος 5.4 (β′), τὸ v εἶναι καὶ ἰδιοδιάνυσμα τοῦ f^*, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ $\overline{\lambda}$. Ἄρα $\lambda v = f(v) = f^*(v) = \overline{\lambda} v$, ὁπότε $(\overline{\lambda} - \lambda)v = 0$. Καθὼς τὸ v εἶναι μὴ μηδενικὸ διάνυσμα, συμπεραίνομε ὅτι $\overline{\lambda} = \lambda$, ἄρα $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Πόρισμα 5.6 *Ἂν ὁ $f \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι κανονικὸς τελεστὴς καὶ λ_1, λ_2 εἶναι διαφορετικὲς ἰδιοτιμές του, μὲ ἀντίστοιχους ἰδιοχώρους W_1, W_2, τότε $W_1 \perp W_2$.*

Ἀπόδειξη Ἂν $w_i \in W_i$ $(i = 1, 2)$, θὰ δείξομε ὅτι $w_1 \perp w_2$. Πράγματι,

$$\lambda_1\langle w_1, w_2\rangle = \langle \lambda_1 w_1, w_2\rangle = \langle f(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, f^*(w_2)\rangle = \langle w_1, \overline{\lambda_2} w_2\rangle = \lambda_2\langle w_1, w_2\rangle,$$

ἄρα $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle w_1, w_2\rangle = 0$. Καθὼς $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, συμπεραίνομε ὅτι $\langle w_1, w_2\rangle = 0$, δηλαδή, $w_1 \perp w_2$.

□

Ἄσκηση 19 *Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε πραγματικὸς $n \times n$ συμμετρικὸς πίνακας A διαγωνιοποιεῖται πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{R}$, δηλαδή, ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος πραγματικὸς $n \times n$ πίνακας P καὶ D διαγώνιος πραγματικὸς πίνακας, τέτοιοι ὥστε $A = PDP^{-1}$.*

Ὑπόδειξη: Ἔστω f ὁ τελεστὴς τοῦ $\mathbb{R}^n$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση τοῦ $\mathbb{R}^n$ εἶναι ὁ A. Ἐφαρμόστε τὸ Θεώρημα 4.9, ἐκμεταλλευόμενοι καὶ τὸ Πόρισμα 5.5.

Θεώρημα 5.7 *Ἔστω ὅτι ὁ V ὁρίζεται πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{C}$. Ὑποθέτομε ὅτι ὁ τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι κανονικός, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ εἶναι ὅλες οἱ διαφορετικὲς ἰδιοτιμές του καὶ $W_1, \dots, W_k$ οἱ ἀντίστοιχοι ὑπόχωροι. Τότε $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Ἐπιπλέον, ἂν $\mathcal{B}_i$ εἶναι ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ W_i ($i = 1, \dots, k$), τότε $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ εἶναι ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V, ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὁ πίνακας τοῦ f εἶναι διαγώνιος.*

Ἀπόδειξη Ἔστω $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i = \{w_1, \dots, w_m\}$. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 4.7 (β′) ξέρομε ὅτι τὰ διανύσματα $w_1, \dots, w_m$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Τὰ διανύσματα αὐτὰ εἶναι ἀνὰ δύο κάθετα. Πράγματι, ἔστω $1 \leq i < j \leq m$. Ἂν τὰ w_i, w_j ἀνήκουν στὸν ἴδιο ἰδιόχωρο, ἔστω W_μ, τότε εἶναι διανύσματα τῆς ὀρθοκανονικῆς βάσης $\mathcal{B}_\mu$, ἄρα εἶναι κάθετα μεταξύ τους. Ἂν τὰ τὰ w_i, w_j ἀνήκουν σὲ διαφορετικοὺς ἰδιοχώρους, W_μ καὶ W_ν, ἀντιστοίχως, τότε, εἶναι καὶ πάλι κάθετα, λόγῳ τοῦ Πορίσματος 5.6[11]. Ἔτσι, τὰ $w_1, \dots, w_m$ εἶναι ἀνὰ δύο κάθετα μεταξύ τους καί εἶναι καὶ μοναδιαῖα, ὡς διανύσματα ὀρθοκανονικῶν βάσεων.

Ἂν $m = n$, τότε τὰ $w_1, \dots, w_n$ εἶναι ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V, ἀποτελούμενη ἀπὸ ἰδιοδιανύσματα τοῦ f, ἄρα, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 4.9, ὡς πρὸς αὐτὴ τὴ βάση, ὁ f ἔχει διαγώνιο πίνακα.

Μένει να δείξομε ὅτι $m = n$. Ἀπὸ τὴν ἀνεξαρτησία τῶν $w_1, \dots, w_m$ συμπεραίνομε ὅτι $m \leq n$. Θὰ ὑποθέσομε ὅτι $m < n$ καὶ θὰ ὁδηγηθοῦμε σὲ ἄτοπο. Ἀφοῦ $m < n$, ἔπεται ὅτι τὰ διανύσματα $w_1, \dots, w_m$ μποροῦμε νὰ τὰ συμπληρώσομε μὲ διανύσμτα $w'_{m+1}, \dots, w'_n$, ἔτσι ὥστε τὰ $w_1, \dots, w_m, w'_{m+1}, \dots, w'_n$ ν' ἀποτελοῦν βάση γιὰ τὸν V. Ἐφαρμόζοντας τὴ διαδικασία Gram-Schmidt στὰ $w_1, \dots, w_m, w'_{m+1}, \dots, w'_n$ παίρνομε μιὰ ὀρθοκανονικὴ βάση, τῆς ὁποίας τὰ m πρῶτα διανύσματα παραμένουν ἀναλλοίωτα (βλ. ἄσκηση 17). Ἄρα καταλήγομε στὴν ὀρθοκανονικὴ βάση $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$. Ἔστω ὁ ὑπόχωρος $W = \langle w_{m+1}, \dots, w_n\rangle$.

Ἰσχυρισμός: $f(W) \subseteq W$. Πράγματι, ἂν αὐτὸ δὲν ἀλήθευε, θὰ μπορούσαμε νὰ βροῦμε $w \in W$, τέτοιο ὥστε $f(w) \notin W$. Τότε, γράφοντας τὸ $f(w)$ ὡς πρὸς τὴ βάση $w_1, \dots, w_n$ θὰ εἴχαμε μιὰ σχέση τῆς μορφῆς $f(w) = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m + c_{m+1} w_{m+1} + \cdots c_n w_n$ μὲ $c_i \neq 0$ γιὰ ἕνα τοὐλάχιστον $i \leq m$. Ἔστω ἕνα τέτοιο i. Θυμηθῆτε ὅτι ὁ W_i εἶναι ἰδιόχωρος,

[11] Ἐδῶ παίζει ρόλο ἡ κανονικότητα τοῦ f.

ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ κάποια ἰδιοτιμή, ἔστω λ, τοῦ V. Τότε (βλ. ἄσκηση 18 καὶ Πόρισμα 5.4)

$$c_i = \langle f(w), w_i\rangle = \langle w, f^*(w_i)\rangle =^{12} \langle w, \overline{\lambda} w_i\rangle = \lambda\langle w, w_i\rangle = 0.$$

Ἡ δεξιώτερη ἰσότητα, παραπάνω, αἰτιολογεῖται ἀπὸ τὸ ὅτι $w \in \langle w_{m+1}, \ldots, w_n\rangle$, ἐνῶ τὸ w_i εἶναι κάθετο πρὸς καθένα ἀπὸ τὰ $w_{m+1}, \ldots, w_n$, ἀφοῦ $i \leq m$. Ἔτσι, $c_i = 0$, ἐνῶ παραπάνω ὑποθέσαμε ὅτι $c_i \neq 0$.

Γνωρίζοντας τώρα ὅτι $f(W) \subseteq W$, μποροῦμε νὰ θεωρήσομε τὸν γραμμικὸ τελεστὴ $f|_W \in \mathcal{L}(W, W)$. Ἐπειδὴ εἴμαστε πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{C}$, εἴμαστε βέβαιοι ὅτι αὐτὸς ὁ τελεστὴς ἔχει μιὰ ἰδιοτιμή, ἔστω λ, ἄρα ὑπάρχει μὴ μηδενικὸ $w \in W$, τέτοιο ὥστε $f(w) = \lambda w$. Αὐτὴ ἡ σχέση, ὅμως, λέει ὅτι τὸ λ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f, ἄρα $\lambda = \lambda_i$ γιὰ κάποιο $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ἀλλά τότε, $w \in W_i$, ἄρα $w \in \langle w_1, \ldots, w_m\rangle$, ποὺ ἔρχεται σὲ ἀντίφαση μὲ τὸ γεγονὸς ὅτι $w \in \langle w_{m+1}, \ldots, w_n\rangle$, ἀφοῦ τὸ w εἶναι μὴ μηδενικό.

□

Τετραγωνικὲς μορφές. Σὲ κάποιες ἀπὸ τὶς ἑπόμενες ἀσκήσεις ἀναφέρεται ἡ πολὺ σημαντικὴ ἔννοια τῆς *τετραγωνικῆς μορφῆς*. Κάθε πολυώνυμο μιᾶς ἢ (τὸ συνηθέστερο) περισσοτέρων μεταβλητῶν, τὸ ὁποῖο εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων δευτέρου βαθμοῦ (ὅλα τὰ μονώνυμα) λέγεται τετραγωνικὴ μορφή. Ἔτσι, τὸ πολυώνυμο $2x^2 - 3xy + z^2 + 7xz \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ εἶναι τετραγωνικὴ μορφή, ἐνῶ κανένα ἀπὸ τὰ $2x^2 - 3xy + z^2 + 7xz - 2$ $2x^2 - 3xy + z^2 + 7xz + x + 3y$ δὲν εἶναι τετραγωνικὴ μορφή.
Μία τετραγωνικὴ μορφὴ n μεταβλητῶν $x_1, \ldots, x_n$ μπορεῖ, συνεπῶς, νὰ γραφεῖ μὲ τὴ γενικὴ μορφὴ

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_i x_j$$

(παρατηρῆστε ὅτι, γιὰ $i = j$ εἶναι $x_i x_j = x_i^2$. Ἔτσι, στὴν περίπτωση τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς $2x^2 - 3xy + z^2 + 7xz - 11yz$, ἂν ἀντιστοιχήσομε στὰ x, y, z τὰ x_1, x_2, x_3, εἶναι: $a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{13} = 7, a_{22} = 0, a_{23} = -11, a_{33} = 1$.
Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι ἡ παραπάνω γενικὴ τετραγωνικὴ μορφὴ $q(x_1, \ldots, x_n)$ μπορεῖ νὰ ἐκφραστεῖ μέσῳ πινάκων (τοὺς 1×1 πίνακες ταυτίζομε μὲ ἀριθμούς), ὡς ἑξῆς:

$$q(x_1, \ldots, x_n) = (x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & \ldots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} & \ldots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \frac{1}{2}a_{3n} \ldots & a_{nn} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

Ὁ παραπάνω $n \times n$ πίνακας λέγεται *πίνακας τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς q*.

[12]Βλ. Πόρισμα 5.4

Ἄσκηση 20 *Ἐκφρᾶστε τὶς τετραγωνικὲς μορφὲς* $q_1(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$, $q_2(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 + xy + 2yz - 6zy$, $q_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{1\le i\le j\le 4}(i^2 + j^2)x_i x_j$ *μὲ τὴν παραπάνω μορφὴ γινομένου πινάκων.*

Παρατηρῆστε ὅτι ὁ $n \times n$ πίνακας στὸ δεξιὸ μέλος τῆς (8) εἶναι συμμετρικός. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, κάθε συμμετρικὸς $n \times n$ πίνακας A ὁρίζει μία τετραγωνικὴ μορφὴ $q(x_1,\ldots,x_n)$ μέσῳ τῆς σχέσης

$$q(x_1,\ldots,x_n) = (x_1\ x_2 \ldots x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Αὐτὴ εἶναι *ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸν πίνακα A.*

Στὴν εἰδικὴ πολὺ ἐνδιαφέρουσα περίπτωση, ποὺ οἱ συντελεστὲς τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς $q(x_1,\ldots,x_n)$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, ὁ πίνακας τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς, ἂς τὸν συμβολίσομε μὲ Q, ἔχει πραγματικὰ στοιχεῖα. Θεωροῦμε τὸν $\mathbb{C}^n$ ἐφοδιασμένο μὲ τὸ σύνηθες ἐσωτερικὸ γινόμενο. Ἔστω $\mathcal{E}$ ἡ στάνταρ βάση τοῦ $\mathbb{C}^n$ καὶ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ ἐκεῖνος ὁ τελεστής, γιὰ τὸν ὁποῖον $A_{f/\mathcal{E}} = Q$. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 5.2 καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Q εἶναι πραγματικὸς καὶ συμμετρικός, ἔχομε

$$A_{f^*/\mathcal{E}} = (\overline{A_{f/\mathcal{E}}})^{\mathrm{T}} = (\overline{Q})^{\mathrm{T}} = Q = A_{f/\mathcal{E}},$$

ἄρα $f^* = f$· εἰδικώτερα, ὁ f εἶναι κανονικὸς τελεστής. Συνεπῶς, ἀπὸ τὸ Πόρισμα 5.5, ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ f (δηλαδή, οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ Q) εἶναι πραγματικές, ἄρα κάθε ἰδιόχωρος τοῦ f διαθέτει βάση ἀποτελούμενη ἀπὸ διανύσματα τοῦ $\mathbb{R}^n$.[13] Ἔστω ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ f εἶναι οἱ $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $d_1,\ldots,d_k$ καὶ ἀντίστοιχους ἰδιοχώρους $W_1,\ldots,W_k$. Γιὰ $i = 1,\ldots,k$, ἔστω $\mathcal{B}_i$ ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ W_i μὲ $\mathcal{B}_i \subset \mathbb{R}^n$. Τότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.7, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i \subset \mathbb{R}^n$ εἶναι ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ $\mathbb{C}^n$ καὶ ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{B}$ ἰσοῦται μὲ τὸν διαγώνιο πίνακα στὸ δεξιὸ μέλος τῆς (5), τὸν ὁποῖον ἂς συμβολίσομε μὲ D. Ἔτσι, $A_{f/\mathcal{B}} = D$. Τέλος, ἔστω P ὁ πίνακας μὲ στῆλες τὶς στῆλες συντεταγμένων τῶν διανυσμάτων τῆς $\mathcal{B}$ ὡς πρὸς τὴ $\mathcal{E}$. Προφανῶς, P εἶναι ὁ πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴν $\mathcal{E}$ στὴ $\mathcal{B}$, ἄρα, ἀπὸ τὴν Πρόταση 3.1,

$$D = A_{f/\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot A_{f/\mathcal{E}} \cdot P = P^{-1}QP = \text{ (ἄσκηση 16) } P^{\mathrm{T}}QP.$$

[13]Γενικά, ἂν ὁ πίνακας A ἔχει πραγματικὰ στοιχεῖα καὶ $\lambda \in \mathbb{R}$ εἶναι ἰδιοτιμή του, τότε τὰ ἰδιοδιανύσματα ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴ λ εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος $(A - \lambda \cdot I)X = 0$. Οἱ συντελεστὲς τοῦ συστήματος εἶναι πραγματικοί, ἄρα ὑπάρχει βάση τοῦ χώρου λύσεων ἀποτελούμενη ἀπὸ διανύσματα μὲ πραγματικὲς συντεταγμένες.

Ἂς θεωρήσομε τώρα τὴν ἀλλαγὴ μεταβλητῶν

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Τότε,

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} Q\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}})Q(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}} QP)\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} D\mathbf{y}.$$

Ἂν συμβολίσομε μὲ $c_1, \ldots, c_n$ τὰ στοιχεῖα στὴ διαγώνιο τοῦ D, [14] τότε $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} D\mathbf{y} = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \cdots + c_n y_n^2$. Αὐτὴ εἶναι ἡ *διαγώνιος* ἢ *κανονικὴ μορφὴ* τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς $q(x_1, \ldots, x_n)$.

Ἄσκηση 21 *Ἔστω ὁ 3×3 πραγματικὸς πίνακας*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(α΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει πίνακας $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, τέτοιος ὥστε ὁ $P^{\mathrm{T}}AP$ νὰ εἶναι διαγώνιος. Ποιὸς εἶναι αὐτὸς ὁ διαγώνιος πίνακας; Ὁ πίνακας P ἔχει τὴν ἰδιότητα $P^{\mathrm{T}}P = I$, ἄρα $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$.

Ὑπόδειξη: Ἔστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ὁ γραμμικὸς τελεστής, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση τοῦ $\mathbb{R}^3$ εἶναι ὁ A. Ἔστω $\mathcal{B}'$ μία ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ $\mathbb{R}^3$ ἀποτελούμενη ἀπὸ ἰδιοδιανύσματα τοῦ f. Τὴν ὕπαρξη τῆς $\mathcal{B}'$ μᾶς ἐξασφαλίζει τὸ Θεώρημα 5.7, ἀλλὰ γιὰ τὴν ἄσκηση δὲν ἀπαιτεῖται ὁ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμός της. Δεῖξτε ὅτι ὁ πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴ βάση $\mathcal{B}'$ στὴ στάνταρ βάση ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ πίνακα P τῆς ἐκφώνησης.

Οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A: $0, (9 + \sqrt{105})/2, (9 - \sqrt{105})/2$ εἶναι τὰ διαγώνια στοιχεῖα τοῦ ζητούμενου διαγωνίου πίνακα.

(β΄) Ὑπολογῖστε τὴν τετραγωνικὴ μορφὴ $q(x, y, z)$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν πίνακα A. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀλλαγὴ μεταβλητῶν

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

μετασχηματίζει τὴν τετραγωνικὴ μορφὴ $q(x, y, z)$ σὲ μία “διαγώνια” τετραγωνικὴ μορφὴ $Q(X, Y, Z)$, δηλαδή, σὲ τετραγωνικὴ μορφὴ τοῦ τύπου $aX^2 + bY^2 + cZ^2$.

Ὑπόδειξη - Ἀπάντηση: Θὰ κάνετε χρήση τοῦ ἐρωτήματος (α΄).

Οἱ συντελεστὲς τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς $Q(X, Y, Z)$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A.

---

[14] Ἄρα, $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{d_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{d_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{d_k})$.

Ἄσκηση 22 *Ὑπολογῖστε τὴν κανονικὴ (διαγώνιο) μορφὴ τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς*

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4.$$

Ὑπολογῖστε τὸν πίνακα P ἀλλαγῆς μεταβλητῶν, μέσῳ τοῦ ὁποίου μετασχηματίζομε τὴν q σὲ διαγώνιο τετραγωνικὴ μορφή· βλ. (9).

Ὑπόδειξη - Ἀπάντηση: Ὁ πίνακας τῆς q ἔχει ἰδιοτιμὲς $1, -1, 3, 5$.

Ἡ διαγώνιος τετραγωνικὴ μορφὴ εἶναι $y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2 + 5y_4^2$. $\quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

6 Κανονικὴ μορφὴ Jordan

Σ' αὐτὴ τὴν ἑνότητα, ὅλοι οἱ διανυσματικοὶ χῶροι εἶναι πεπερασμένης διαστάσεως πάνω ἀπὸ ἕνα γενικὸ σῶμα F. Ὁποτεδήποτε ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι $F = \mathbb{C}$, αὐτὸ θὰ τονίζεται.

Σημειώνεται ὅτι οἱ θεωρούμενοι διανυσματικοὶ χῶροι δὲν εἶναι, ὑποχρεωτικά, ἐφοδιασμένοι μὲ ἐσωτερικὸ γινόμενο.

Ὁρισμός. Ἔστω ὁ F-διανυσματικὸς χῶρος V. Ἕνας τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(V, V)$ χαρακτηρίζεται *μηδενοδύναμος* ἂν ὑπάρχει θετικὸς ἀκέραιος q, τέτοιος ὥστε $f^q = 0 \in \mathcal{L}(V, V)$ (ὁ μηδενικὸς τελεστὴς τοῦ V). Στὴν περίπτωση αὐτή, ὁ ἐλάχιστος τέτοιος q λέγεται *δείκτης* τοῦ f.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ προκύπτει ἀμέσως ὅτι, ἂν ὁ f ἔχει δείκτη q, τότε ὑπάρχει $v \in V$ τέτοιο ὥστε $f^{q-1}(v) \neq 0$.

Πρόταση 6.1 *Ἔστω ὅτι ὁ $f \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη q καὶ $v \in V$ τέτοιο ὥστε $f^{q-1}(v) \neq 0$. Τότε τὰ διανύσματα $v, f(v), \dots, f^{q-1}(v)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Ἐπιπλέον, ὁ ὑπόχωρος $U = \langle v, f(v), \dots, f^{q-1}(v)\rangle$ εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f.*

Ἀπόδειξη Ἂν τὰ $v, f(v), \dots, f^{q-1}(v)$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, τότε ὑπάρχουν c_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$), ὄχι ὅλα μηδέν, τέτοια ὥστε $\sum_{i=0}^{q-1} c_i f^i(v) = 0$.[15] Ἔστω $c_j \neq 0$ μὲ τὸ j ἐλάχιστο δυνατό. Τότε $c_j f^j(v) = -c_{j+1} f^{j+1}(v) - \cdots - c_{q-1} f^{q-1}(v)$. Διαιρώντας διὰ c_j καὶ θέτοντας $b_i = -c_i/c_j$ γιὰ $i = j+1, \dots, q-1$ παίρνομε

$$\begin{aligned} f^j(v) &= b_{j+1} f^{j+1} + b_{j+2} f^{j+2}(v) + \cdots + b_{q-1} f^{q-1}(v) \\ &= f^{j+1}(\underbrace{b_{j+1} v + b_{j+2} f(v) + \cdots + b_{q-1} f^{q-j-2}(v)}_{u \in V}) = f^{j+1}(u). \end{aligned}$$

Ἀλλὰ τότε,

$$f^{q-1}(v) = f^{q-1-j}(f^j(v)) = f^{q-1-j}(f^{j+1}(u)) = f^q(u) = 0,$$

[15] Ὑπενθυμίζεται ὅτι $f^0 = \mathrm{id}$, ἄρα $f^0(v) = v$.

ὁπότε ἐρχόμαστε σὲ ἀντίφαση μὲ τὴν ὑπόθεση $f^{q-1}(v) \neq 0$.

Ὅσον ἀφορᾷ στὸν δεύτερο ἰσχυρισμὸ τῆς πρότασης, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ U καὶ τὴ σχέση $f^q(v) = 0$, εἶναι φανερὸ ὅτι $f(U) = \langle f(v), f^2(v), f^{q-1}(v)\rangle$.

□

Θεώρημα 6.2 *Ἔστω ὅτι ὁ $f \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη q καὶ $v \in V$ τέτοιο ὥστε $f^{q-1}(v) \neq 0$. Τότε, ὑπάρχει διανυσματικὸς ὑπόχωρος W τοῦ V, ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, τέτοιος ὥστε $V = U \oplus W$, ὅπου $U = \langle v, f(v), \dots, f^{q-1}(v)\rangle$.*[16]

Ἀπόδειξη Ἐπαγωγικὰ ἐπὶ τοῦ δείκτη q..

Ἔστω ὅτι V εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε διανυσματικὸς χῶρος καὶ ὁ $f \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη 1. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι $f(v) = 0$ γιὰ κάθε $v \in V$, δηλαδή, ὁ f εἶναι ὁ μηδενικὸς τελεστὴς τοῦ V. Ἡ συνθήκη $f^{q-1}(v) \neq 0$, στὴν περίπτωση αὐτή, σημαίνει $f^0(v) \neq 0$, δηλαδή, $v \neq 0$. Ἔστω, λοιπόν, $v \neq 0$, ὁπότε, μὲ τὸν συμβολισμὸ τῆς ἐκφώνησης, $U = \langle u\rangle$. Συμπληρώνομε τὸ v μὲ διανύσματα $v_2, \dots, v_n$ (ὅπου n εἶναι ἡ διάσταση τοῦ V) καὶ θέτομε $W = \langle v_2, \dots, v_n\rangle$. Εἶναι προφανὲς ὅτι $V = U \oplus W$ καὶ ὁ W εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f διότι, καθὼς ὁ f εἶναι ὁ μηδενικὸς τελεστής, $f(W) = \{0\} \subset W$.

Ἔστω τώρα $k \geq 2$ καὶ τὸ θεώρημα ἰσχύει γιὰ $q = k - 1$. Τοῦτο σημαίνει τὸ ἑξῆς:

> *Ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση.* Ἂν Z εἶναι ὁποιοσδήποτε διανυσματικὸς χῶρος, g εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε μηδενοδύναμος τελεστὴς $\in \mathcal{L}(Z, Z)$ δείκτη $k - 1$ καὶ $z \in Z$ ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα τέτοιο ὥστε $g^{k-2}(z) \neq 0$, τότε ὑπάρχει ὑπόχωρος W_0 τοῦ Z, ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν g, τέτοιος ὥστε $Z = U_0 \oplus W_0$, ὅπου $U_0 = \langle z, g(z), \dots, g^{k-2}(z)\rangle$.
>
> *Βῆμα ἀπὸ τὸ $k - 1$ στὸ k.* Ὑποθέτομε ὅτι V εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε διανυσματικὸς χῶρος, f εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε μηδενοδύναμος τελεστὴς $\in \mathcal{L}(V, V)$ μὲ δείκτη k καὶ $v \in V$ ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα τέτοιο ὥστε $f^{k-1}(v) \neq 0$.
>
> Θὰ ὑπολογίσομε ἕναν ὑπόχωρο W τοῦ V, ἀναλλοίωτο ἀπὸ τὸν f, τέτοιον ὥστε $V = U \oplus W$, ὅπου $U = \langle v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)\rangle$.

Ἔστω $Z = f(V)$ καὶ $z = f(v)$. Ὁ Z εἶναι ὑπόχωρος τοῦ V ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, διότι $f(Z) \subseteq f(V) = Z$, ἄρα ὁ περιορισμὸς τοῦ f στὸν Z εἶναι γραμμικὸς τελεστὴς τοῦ Z. Μ' ἄλλα λόγια, ἂν θέσομε $g = f|_Z$, τότε $g \in \mathcal{L}(Z, Z)$. Ἐπιπλέον, σύμφωνα μὲ τὴν ἄσκηση 23, ὁ g εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη $k - 1$. Ἄρα, ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση

$$Z = U_0 \oplus W_0, \quad W_0 \text{ ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν } g \text{ καὶ } U_0 = \langle z, g(z), \dots, g^{k-2}(z)\rangle. \tag{10}$$

Ἀφοῦ ὁ g εἶναι ὁ περιορισμὸς τοῦ f στὸν ὑπόχωρο Z, εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ W_0 εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f καὶ $g(z) = f(z)$, ἄρα,

$$W_0 \text{ ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν } f \text{ καὶ } U_0 = \langle z, f(z), \dots, f^{k-2}(z)\rangle.$$

[16] Ὑπενθύμιση: Ἕνας ὑπόχωρος W τοῦ V λέμε ὅτι εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν $f \in \mathcal{L}(V, V)$ ἂν $f(W) \subseteq W$.

Παρατηροῦμε ὅτι

$$U_0 = \langle z, f(z), \ldots, f^{k-2}(z)\rangle = \langle f(v), f^2(v), \ldots, f^{k-1}(v)\rangle \subset \begin{cases} \langle v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{k-1}(v)\rangle = U \\ f(V) = Z \end{cases}$$

ἄρα, $U_0 \subseteq U \cap Z$. Στὴν πραγματικότητα,

$$U_0 = Z \cap U \tag{11}$$

(βλ. ἄσκηση 24). Τώρα ὁρίζομε

$$W_1 = \{u \in V : f(u) \in W_0\}$$

καὶ ἀποδεικνύομε ἕξι ἰσχυρισμούς, οἱ ὁποῖοι, σταδιακά, θὰ ὁλοκληρώσουν τὴν ἀπόδειξη.

(i) $V = U + W_1$

Ἀπόδειξη: Ἔστω $u \in V$. Τότε $f(u) \in f(V) = Z = U_0 \oplus W_0$, ἄρα $f(u) = u_0 + w_0$, ὅπου $w_0 \in W_0$ καὶ $u_0 \in U_0$, ὁπότε ὑπάρχουν $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-2} \in F$, τέτοια ὥστε

$$\begin{aligned} u_0 &= \lambda_0 z + \lambda_1 f(z) + \cdots + \lambda_{k-2} f^{k-2}(z) \\ &= \lambda_0 f(v) + \lambda_1 f^2(v) + \cdots + \lambda_{k-2} f^{k-1}(v) = f(\underbrace{\lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \cdots + \lambda_{k-2} f^{k-2}(v)}_{u_1 \in U}). \end{aligned}$$

Ἄρα, $f(u) = f(u_1) + w_0$, ὁπότε ἡ σχέση $f(u - u_1) = w_0 \in W_0$ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα ὅτι $u - u_1 \in W_1$, δηλαδή, $u = u_1 + w_1 \in U + W_1$.

(ii) $U \cap W_0 = \{0\}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι $u \in U \cap W_0$. Ἐπειδὴ ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f (Πρόταση 6.1), συμπεραίνομε ὅτι $f(u) \in U$. Ἐπίσης, $f(u) \in f(U) \subseteq f(V) = Z$, ἄρα $f(u) \in U \cap Z = U_0$, λόγῳ τῆς (11). Ἀφ' ἑτέρου, $u \in W_0$ καὶ ὁ W_0 εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, ἄρα $f(u) \in W_0$. Συνεπῶς, $f(u) \in U_0 \cap W_0 = \{0\}$, λόγῳ τῆς (10).

Τώρα θὰ δείξομε ὅτι $u = 0$. Πράγματι, ἀφοῦ $u \in U$, γράφομε $u = \lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(v)$, ἄρα $0 = f(u) = \lambda_0 f(v) + \lambda_1 f^2(v) + \cdots + \lambda_{k-2} f^{k-1}(v)$. Ὅμως τὰ $f(v), \ldots, f^{k-1}(v)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (Πρόταση 6.1), ἄρα $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{k-2} = 0$, ὁπότε $u = \lambda_{k-1} f^{k-1}(v) = \lambda_{k-1} f^{k-2}(z) \in U_0$. Ὅμως, ἔχομε καὶ τὴ σχέση $u \in W_0$, ἄρα $u \in U_0 \cap W_0 = \{0\}$, λόγῳ τῆς (10).

(iii) $W_0 < W_1$.

Ἀπόδειξη. Ἂν $w_0 \in W_0$, τότε, ἐπειδὴ ὁ W_0 εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, ἔχομε $f(w_0) \in W_0$, ἄρα $w_0 \in W_1$, ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ W_1.

(iv) $(U \cap W_1) \cap W_0 = \{0\}$.

Ἀπόδειξη. $(U \cap W_1) \cap W_0 = U \cap (W_1 \cap W_0) \overset{\text{(iii)}}{=} U \cap W_0 \overset{\text{(ii)}}{=} \{0\}$.

Ἀπὸ τὸ (iv) βλέπομε ὅτι $(U \cap W_1) \oplus W_0$ εἶναι ὑπόχωρος τοῦ W_1, ἄρα μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕναν ὑπόχωρο W_2 τοῦ W_1, τέτοιον ὥστε $W_1 = (U \cap W_1) \oplus W_0 \oplus W_2$. Θέτομε $W = W_0 \oplus W_2$, ὁπότε

$$W_1 = (U \cap W_1) \oplus W, \quad W = W_0 \oplus W_2, \quad W \cap (U \cap W_1) = \{0\}. \tag{12}$$

(**v**) $V = U \oplus W$.
Ἀπόδειξη. (α′) Πρῶτα δείχνομε ὅτι $V = U + W$. Ἔστω $x \in V$. Τότε,

$$\begin{aligned} u &\overset{\text{(i)}}{=} u + w_1 \qquad (u \in U,\ w_1 \in W_1) \\ &\overset{\text{(iv)}}{=} u + (u' + w) \qquad (u' \in U \cap W_1,\ w \in W) \\ &= (u + u') + w_1, \qquad (u + u' \in U,\ w \in W). \end{aligned}$$

(β′) Τώρα δείχνομε ὅτι $U \cap W = \{0\}$. Ἂν $x \in U \cap W$, τότε $x \in U$ καὶ $x \in W \subseteq W_1$ λόγῳ καὶ τῆς (12). Ἄρα, $x \in U \cap W_1$, ὁπότε καὶ $x \in W \cap (U \cap W_1) = \{0\}$ λόγῳ τῆς (12).

(**vi**) $f(W) \subseteq W$, δηλαδή, ὁ W εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f.
Ἀπόδειξη. $W \subseteq W_1$ λόγῳ τῆς (12), ἄρα $f(W) \subseteq f(W_1) \subseteq W_0$ ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ W_1. Ἀλλά, ἀπὸ τὴν (12), $W_0 \subseteq W$, ἄρα, τελικά, $f(W) \subseteq W$.

□

Ἄσκηση 23 *Ἔστω V ἕνας ὁποιοσδήποτε διανυσματικὸς χῶρος, f ἕνας μηδενοδύναμος τελεστὴς $\in \mathcal{L}(V, V)$ δείκτη q καὶ W ὑπόχωρος τοῦ V ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f.*

(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ $f|_W$ εἶναι μηδενοδύναμος τελεστὴς τοῦ W δείκτη $q' \le q$.

(β′) Στὴν εἰδικὴ περίπτωση ποὺ $W = f(V)$, δεῖξτε ὅτι ὁ δείκτης τοῦ $f|_W$ ἰσοῦται μὲ $q - 1$.

Ἄσκηση 24 *Ὁλοκληρῶστε τὴν ἀπόδειξη τῆς σχέσης (11) (βλ. ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 6.2).*

Ὑπόδειξη: Ἂν $u \in U \cap Z$, τότε τὸ u, ὡς στοιχεῖο τοῦ U γράφεται $u = \lambda_0 v + (\lambda_1 f(v) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(v))$. Παρατηρῆστε ὅτι, στὸ δεξιὸ μέλος, τὸ ἐντὸς παρενθέσεως ἄθροισμα ἀνήκει στὸ $U_0 \subseteq Z$. Ἂν δείξετε ὅτι $\lambda_0 = 0$, τότε $u \in U_0$. Αὐτὸ θὰ τὸ ἐπιτύχετε ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ τὸ u ἀνήκει στὸ Z (ὅπως καὶ τὸ ἐντὸς παρενθέσεως ἄθροισμα), ἕπεται ὅτι $\lambda_0 v \in Z = f(V)$, ἄρα $\lambda_0 v = f(v_1)$ γιὰ κάποιο $v_1 \in V$. Ἐφαρμόστε στὴν τελευταία σχέση τὴν ἀπεικόνιση f^{k-1} καὶ θυμηθῆτε ὅτι $f^{k-1}(v) \neq 0$.

Θεώρημα 6.3 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V, V)$ μηδενοδύναμος. Τότε ὑπάρχουν πεπερασμένοι τὸ πλῆθος φυσικοὶ ἀριθμοὶ $q_1 \ge q_2 \ge \ldots \ge q_r$ καὶ διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_r$, τέτοια ὥστε $f^{q_i}(v_i) = 0$ καὶ τὰ διανύσματα*

$$\begin{gathered} v_1, f(v_1), \ldots, f^{q_1}(v_1), \\ v_2, f(v_2), \ldots, f^{q_2}(v_2), \\ \vdots \\ v_r, f(v_r), \ldots, f^{q_r}(v_r) \end{gathered}$$

νὰ ἀποτελοῦν βάση τοῦ V.

Ἀπόδειξη Ἔστω q_1 ὁ δείκτης τοῦ f. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 6.1, ὑπάρχει $v_1 \in V$, τέτοιο ὥστε $f^{q_1-1}(v_1) \neq 0$ καὶ τὰ διανύσματα $v_1, f(v_1), \ldots, f^{q_1}(v_1)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Τότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.2, ὑπάρχει ὑπόχωρος V_1 τοῦ V, ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, τέτοιος ὥστε $V = \langle v_1, f(v_1), \ldots, f^{q_1}(v_1)\rangle \oplus V_1$. Ἀπὸ τὴν ἄσκηση 23 (αʹ), ὁ $f|_{V_1}$ εἶναι μηδενοδύναμος καὶ γιὰ τὸν δείκτη του, ἔστω q_2, ἰσχύει $q_2 \leq q_1$. Ἐφαρμόζοντας, καὶ πάλι, τὴν Πρόταση 6.1, ἀλλὰ τώρα γιὰ τὸν V_1 καὶ τὸν τελεστὴ $f|_{V_1}$, συμπεραίνομε ὅτι ὑπάρχει $v_2 \in V_1$, τέτοιο ὥστε $f^{q_2-1}(v_2) \neq 0$ καὶ τὰ διανύσματα $v_2, f(v_2), \ldots, f^{q_2}(v_2)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Τότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.2, ὑπάρχει ὑπόχωρος V_2 τοῦ V_1, ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, τέτοιος ὥστε $V_1 = \langle v_2, f(v_2), \ldots, f^{q_2}(v_2)\rangle \oplus V_2$, ἄρα

$$V = \langle v_1, f(v_1), \ldots, f^{q_1}(v_1)\rangle \oplus \langle v_2, f(v_2), \ldots, f^{q_2}(v_2)\rangle \oplus V_2.$$

Σʼ αὐτὴ τὴ σχέση ἔχομε εὐθὺ ἄθροισμα, ἄρα τὰ $v_1, f(v_1), \ldots, f^{q_1}(v_1), v_2, f(v_2), \ldots, f^{q_2}(v_2)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Ἂν ἐπαναλάβομε τὴ διαδικασία μὲ τὸν V_2 καὶ τὸν τελεστή του $f|_{V_2}$, θὰ πάρομε ἕνα ἀκόμη μεγαλύτερο πλῆθος γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων. Ἔτσι, σὲ κάθε νέο βῆμα, τὸ σύνολο τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων αὐξάνει. Ἐπειδή, ὅμως, ὁ V ἔχει πεπερασμένη διάσταση, ἡ διαδικασία αὐτὴ θὰ σταματήσει ὕστερα ἀπὸ πεπερασμένο πλῆθος βημάτων. Δηλάδή, ὕστερα ἀπὸ r, ἔστω, βήματα, θὰ καταλήξομε σὲ μιὰ σχέση

$$V = \langle v_1, f(v_1), \ldots, f^{q_1}(v_1)\rangle \oplus \langle v_2, f(v_2), \ldots, f^{q_2}(v_2)\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_r, f(v_r), \ldots, f^{q_r}(v_r)\rangle \oplus V_r,$$

στὴν ὁποία V_r θὰ εἶναι ὁ μηδενικὸς ὑπόχωρος.
Ἐπειδὴ σὲ κάθε βῆμα $i = 1, \ldots, r$ τὰ διανύσματα $v_i, f(v_i), \ldots, f^{q_i}(v_i)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα καὶ τὸ παραπάνω ἄθροισμα τῶν ὑποχώρων $\langle v_i, f(v_i), \ldots, f^{q_i}(v_i)\rangle$ εἶναι εὐθύ, ἔπεται ὅτι ἡ ἕνωση $\bigcup_{i=1}^{r}\{v_i, f(v_i), \ldots, f^{q_i}(v_i)\}$ εἶναι βάση τοῦ V.

□

Θεώρημα 6.4 *Γιὰ κάθε $f \in \mathcal{L}(V, V)$ ὑπάρχουν ὑπόχωροι U, W τοῦ V, ἀναλλοίωτοι ἀπὸ τὸν f, τέτοιοι ὥστε $V = U \oplus W$, ὁ $f|_U$ εἶναι μηδενοδύναμος καὶ ὁ $f|_W$ εἶναι ἀντιστρέψιμος.*

Ἀπόδειξη Γιὰ $k = 1, 2, \ldots$ ἔστω Z_k ὁ πυρήνας τοῦ f^k, δηλαδή, $Z_k = \{v \in V : f^k(v) = 0\}$. Εἶναι $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Z_3 \subseteq \ldots$ (ἄσκηση 25), ἄρα, ἀφοῦ ὁ V ἔχει πεπερασμένη διάσταση, ὑπάρχει δείκτης $q \in \mathbb{N}$, τέτοιος ὥστε $Z_q = Z_{q+1} = Z_{q+2} = \ldots$, δηλαδή, $Z_k = Z_q$ γιὰ κάθε $k \geq q$. Ὑποθέτομε, δίχως βλάβη τῆς γενικότητας, ὅτι ὁ q εἶναι ὁ ἐλάχιστος δυνατός. Ἔστω

$$U = \mathbb{Z}_q, \quad W = f^q(V).$$

Ἀποδεικνύομε τώρα μία σειρὰ ἰσχυρισμῶν:

(αʹ) Ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $u \in U$. Θέλομε νὰ δείξομε ὅτι $f(u) \in U = Z_q$. Αὐτὴ ἡ σχέση ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $f^q(f(u)) = 0$, δηλαδή, μὲ τὴν $f^{q+1}(u) = 0$. Ἡ σχέση αὐτὴ ἰσχύει διότι, ἐξ ὑποθέσεως, $u \in U = Z_q = Z_{q+1}$, ἄρα, $f^{q+1}(u) = 0$.

(β′) Ὁ W εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $w \in W$. Θέλομε νὰ δείξομε ὅτι $f(w) \in W = f^q(V)$. Ἀλλὰ $w \in W = f^q(V)$ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει $v \in V$, τέτοιο ὥστε $w = f^q(v)$, ὁπότε $f(w) = f^{q+1}(v) = f^q(f(v)) \subseteq f^q(V) = W$.

(γ′) $U \cap W = \{0\}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι $u \in U = Z_q$ καὶ $u \in W = f^q(V)$. Ἡ δεύτερη σχέση λέει ὅτι, γιὰ κάποιο $v \in V$ ἔχομε $u = f^q(v)$, ἐνῶ ἡ πρώτη σχέση λέει ὅτι $f^q(u) = 0$, ἄρα $f^q(f^q(v)) = 0$. Συνεπῶς, $f^{2q}(v) = 0$, ἄρα $v \in Z_{2q} = Z_q$. Ἀλλὰ $v \in Z_q$ σημαίνει ὅτι $f^q(v) = 0$, δηλαδή, $u = 0$.

(δ′) $U \oplus W = V$.

Ἀπόδειξη. Λόγῳ τοῦ (γ′), ἀρκεῖ ν' ἀποδείξομε ὅτι $U + W = V$. Γι' αὐτὴ τὴ σχέση, πάλι, ἀρκεῖ ν' ἀποδείξομε ὅτι $\dim(U + W) = \dim(V)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \overset{(\gamma')}{=} \dim(U) + \dim(W)\\ &= \dim(\text{πυρήνας τοῦ } f^q) + \dim(\text{εἰκόνα τοῦ } f^q)\\ &= \dim(V).\end{aligned}$$

$f^{q+1}(u) = 0$.

(ε′) Ὁ $f|_U$ εἶναι μηδενοδύναμος.

Ἀπόδειξη. Εἶναι $U = Z_q$. Ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ Z_q, ἔχομε ὅτι $f^q(u) = 0$, γιὰ κάθε $u \in U$. Ἀλλὰ αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ $f|_U$ εἶναι μηδενοδύναμος.

(ε′) Ὁ $f|_W$ εἶναι ἀντιστρέψιμος.

Ἀπόδειξη. Ὁ W ἔχει πεπερασμένη διάσταση, ἄρα, μιὰ γραμμικὴ ἀπεικόνιση $W \to W$ εἶναι ἰσομορφισμὸς (ἰσοδύναμα: ἀντιστρέψιμη), ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι $1-1$. Στὴ συγκεκριμένη περίπτωση, θὰ δείξομε ὅτι ὁ $f|_W$ εἶναι $1-1$. Ἀρκεῖ νὰ δείξομε ὅτι ὁ πυρήνας τοῦ $f|_W$ περιέχει μόνο τὸ μηδενικὸ διάνυσμα. Πράγματι, ἔστω $w \in W$ καὶ $f(w) = 0$. Ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ W, ὑπάρχει $v \in V$, τέτοιο ὥστε $w = f^q(v)$. Ἄρα $0 = f(w) = f^{q+1}(v)$, ποὺ σημαίνει ὅτι $v \in Z_{q+1} = Z_q$. Συνεπῶς, $f^q(v) = 0$, δηλαδή, $w = 0$.

□

Ἄσκηση 25 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Γιὰ $k = 1, 2, \ldots$ ἔστω Z_k ὁ μηδενόχωρος τοῦ f^k, δηλαδή, $Z_k = \{v \in V : f^k(v) = 0\}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Z_3 \subseteq \ldots$.*

Πρόταση 6.5 *Ἔστω ὅτι $V = U \oplus W$ καὶ $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Ἂν οἱ U, W εἶναι ἀναλλοίωτοι ἀπὸ τὸν f, τότε $\chi_f(X) = \chi_{f|_U}(X) \cdot \chi_{f|_W}(X)$.*

Ἀπόδειξη Ἔστω $\dim(V) = n$, $\dim(U) = k$, $\dim(W) = l$ $(k + l = n)$, $\mathcal{B}_1$ βάση τοῦ U καὶ $\mathcal{B}_2$ βάση τοῦ W. Ὁ V εἶναι εὐθὺ ἄθροισμα τῶν U καὶ W, ἄρα $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ εἶναι βάση, ἂς τὴ συμβολίσομε μὲ $\mathcal{B}$, τοῦ V. Ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, ἄρα $f(\mathcal{B}_1) \subseteq U$, ἄρα, ἂν ἐκφράσομε τὶς f-εἰκόνες τῶν διανυσμάτων τῆς $\mathcal{B}_1$ συναρτήσει τῆς βάσης $\mathcal{B}$, οἱ συντελεστὲς ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}_2$ εἶναι ὅλοι 0. Ἐντελῶς ἀνάλογα, ἂν ἐκφράσομε τὶς f-εἰκόνες τῶν διανυσμάτων τῆς $\mathcal{B}_2$ συναρτήσει τῆς βάσης $\mathcal{B}$, οἱ συντελεστὲς ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}_1$ εἶναι ὅλοι 0. Ἄρα, ὁ πίνακας τῆς f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$ ἔχει τὴ μορφὴ

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} & & & \\ & & & c_{1l} & \dots & c_{1l} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & c_{l1} & \dots & c_{ll} \end{pmatrix},$$

ὅπου στὰ κενὰ ἐννοοῦνται παντοῦ μηδενικά. Ἐπίσης, ὁ πάνω ἀριστερὸς $k \times k$ πίνακας, ἔστω B, εἶναι ὁ πίνακας τοῦ $f|_U$ ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}_1$ καὶ ὁ κάτω δεξιὸς $l \times l$ πίνακας, ἔστω C, εἶναι ὁ πίνακας τοῦ $f|_W$ ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}_2$. Ἄρα, τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο $\chi_f(X)$, ποὺ ταυτίζεται μὲ τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ A, ἰσοῦται μὲ

$$|A - XI_n| = \begin{vmatrix} b_{11} - X & \dots & b_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} - X & & & \\ & & & c_{1l} - X & \dots & c_{1l} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & c_{l1} & \dots & c_{ll} - X \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Ἡ παραπάνω ὁρίζουσα εἶναι, ὅπως λέμε, *διαγώνια κατὰ μπλόκ* καί, ἀπὸ γνωστὴ πρόταση, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν ὁριζουσῶν τῶν μὴ μηδενικῶν μπλόκ· ὁπότε, $|A - XI_n| = |B - XI_k| \cdot |C - XI_l|$. Αὐτὴ ἡ σχέση λέει ὅτι $\chi_f = \chi_{f|_U} \cdot \chi_{f|_W}$.

□

Πρόταση 6.6 *Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{C}$*[17] *καὶ λ ἰδιοτιμὴ τοῦ f, πολλαπλότητας d. Ἔστω, ἐπίσης, ὁ τελεστὴς $g = f - \lambda \cdot I$. Τότε, ὑπάρχουν ὑπόχωροι U, W τοῦ V, ἀναλλοίωτοι ἀπὸ τὸν f, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὅλες τὶς παρακάτω ἰδιότητες:*

- *$V = U \oplus W$ καὶ $\dim(U) = d$.*
- *Ὁ $f|_U$ ἔχει μοναδικὴ ἰδιοτιμή του τὴ λ μὲ πολλαπλότητα d, ἐνῶ ὁ $f|_W$ δὲν ἔχει ἰδιοτιμὴ τὴ λ.*
- *Ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν g καὶ ὁ $g|_U$ εἶναι μηδενοδύναμος.*

[17]Γιὰ τοὺς γνωρίζοντες λίγη Θεωρία Σωμάτων: Τὸ θεώρημα ἰσχύει ἂν στὴ θέση τοῦ $\mathbb{C}$ ἔχομε ἕνα ὁποιοδήποτε *ἀλγεβρικῶς κλειστὸ* σῶμα.

Ἀπόδειξη Ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 6.2 στὸν g συμπεραίνομε ὅτι ὑπάρχουν ὑπόχωροι U, W τοῦ V, ἀναλλοίωτοι ἀπὸ τὸν g, μὲ τὸν $g|_U$ μηδενοδύναμο καὶ τὸν $g|_W$ ἀντιστρέψιμο. Ἀποδεικνύομε τώρα μία σειρὰ ἰσχυρισμῶν:

(α′) Ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $u \in U$. Ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ g ἔχομε $g(u) = f(u) - \lambda u$, ἄρα $g(u) = f(u) + \lambda u$. Ὅμως, $f(u) \in U$, διότι ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, ἄρα $g(u) \in U$.

(β′) Ὁ $f|_U$ ἔχει ἰδιοτιμὴ τὴ λ καὶ μόνον αὐτή.

Ἀπόδειξη. Ἔστω q ὁ δείκτης τοῦ $g|_U$ καὶ $u \in U$ μὴ μηδενικό, τέτοιο ὥστε $g^{q-1}(u) \neq 0$. Ἀφοῦ ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τὸν g, ἕπεται ὅτι $g^{q-1}(u) = u_1 \in U \setminus \{0\}$. Εἶναι $g(u_1) = g^q(u) = 0$. Ἀλλὰ $g(u_1) = f(u_1) - \lambda u_1$, ὁπότε $f(u_1) = \lambda u_1$, ποὺ σημαίνει ὅτι λ εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ $f|_U$. Ἔστω ὅτι ὁ $f|_U$ ἔχει καὶ κάποια ἄλλη ἰδιοτιμὴ $\lambda' \neq \lambda$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει $u \in U$, μὴ μηδενικό, τέτοιο ὥστε $f(u) = \lambda' u$. Ὅμως, $g(u) = f(u) - \lambda u = \lambda' u - \lambda u = \mu u$, ὅπου $\mu = \lambda' - \lambda \neq 0$. Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ σὲ ἀντίφαση, διότι, $0 = g^q(u) = g^{q-1}(g(u)) = g^{q-1}(\mu u) = \mu g^{q-1}(u) = g^{q-2}(g(u)) = g^{q-2}(\mu u) = \mu g^{q-2}(u) = \ldots = \mu^q u \neq 0$.

(γ′) Ὁ $f|_W$ δὲν ἔχει ἰδιοτιμὴ τὴ λ.

Ἀπόδειξη. Ἂν αὐτὸ δὲν ἰσχύει, τότε ὑπάρχει μὴ μηδενικὸ $w \in W$, τέτοιο ὥστε $f(w) = \lambda w$. Ἄρα $g(w) = f(w) - \lambda w = 0$, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ μὴ μηδενικὸ $w \in W$ ἀνήκει στὸν πυρήνα τοῦ g. Συνεπῶς, $\mathrm{Ker}(g|_W) \neq \{0\}$, ὁπότε ὁ g δὲν εἶναι $1-1$. Αὐτὸ ἀντίκειται στὸ ὅτι ὁ $g|_W$ εἶναι ἀντιστρέψιμος.

(δ′) Ἡ πολλαπλότητα τῆς ἰδιοτιμῆς λ τοῦ $f|_U$ εἶναι d καὶ $\dim(U) = d$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\dim(V) = n$, $\dim(U) = k$ καὶ $\dim(W) = l$, ὁπότε $k + l = n$ καὶ $\deg(\chi_f) = n$, $\deg(\chi_{f|_U}) = k$ καὶ $\deg(\chi_{f|_W}) = l$. Ἐπειδὴ εἴμαστε πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{C}$, τὰ χαρακτηριστικὰ πολυώνυμα ἀναλύονται πλήρως σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες τῆς μορφῆς (X − ἰδιοτιμή). Ὅμως, λόγῳ τοῦ (β′), ἡ μοναδικὴ ρίζα τοῦ $\chi_{f|_U}$ εἶναι ἡ λ, ἄρα $\chi_{f|_U} = (-1)^k (X - \lambda)^k$. Ἐξ ὑποθέσεως, τὸ χ_f ἔχει ρίζα τὴ λ μὲ πολλαπλότητα d, ἐνῶ, λόγῳ τοῦ (γ′), τὸ $\chi_{f|_W}$ δὲν ἔχει ρίζα τὸ λ. Συνδυάζοντας αὐτὲς τὶς παρατηρήσεις μὲ τὴ σχέση $\chi_f(X) = \chi_{f|_U}(X) \cdot \chi_{f|_W}(X)$ (βλ. Πρόταση 6.5) συμπεραίνομε ἀμέσως ὅτι $d = k$ καὶ ὁ τελεστὴς $f|_U$ ἔχει τὴν ἰδιοτιμὴ λ μὲ πολλαπλότητα d.

□

Θεώρημα 6.7 *Ἔστω ὅτι ὁ V ὁρίζεται πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ καὶ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ εἶναι ὅλες οἱ διαφορετικὲς ἰδιοτιμὲς τ ˜ου f, μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $d_1, \ldots, d_k$. Τότε, ὑπάρχουν ὑπόχωροι $U_1, \ldots, U_k$, μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:*

(α′) $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$.

(β′) *Γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, k$, ὁ U_j εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, $\dim(U_j) = d_j$ καὶ ἡ μοναδικὴ ἰδιοτιμὴ τοῦ $f|_{U_j}$ εἶναι ἡ λ_j με πολλαπλότητα d_j.*

(γ′) *Γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, k$, ὁ U_j εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν τελεστὴ $f - \lambda_j \cdot \mathrm{id}$ καὶ ὁ $(f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})|_{U_j}$ εἶναι μηδενοδύναμος.*

(δ′) *Γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, k$, εἶναι $\mathrm{Ker}((f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})|_{U_j}) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})$.*

Ἀπόδειξη Ἐφαρμόζοντας τὴν Πρόταση 6.1 γιὰ τὴν ἰδιοτιμὴ λ_1, συμπεραίνομε ὅτι ὑπάρχουν ὑπόχωροι U_1, V_1 τοῦ V, ἀναλλοίωτοι ἀπὸ τὸν f, τέτοιοι ὥστε $V = U_1 \oplus V_1$, ὁ $f|_{U_1}$ ἔχει μοναδικὴ τιμὴ τὴ λ_1 μὲ πολλαπλότητα d_1, ὁ $f|_{V_1}$ δὲν ἔχει ἰδιοτιμὴ τὴ λ_1, ὁ U_1 εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν τελεστὴ $f - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}$ καὶ ὁ $(f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})|_{U_1}$ εἶναι μηδενοδύναμος. Δηλαδή, γιὰ τὸν U_1 ἱκανοποιοῦνται ὅλες οἱ ἀπαιτήσεις τοῦ θεωρήματος.

Ἀπὸ τὴν Πρόταση 6.5, $\chi_f = \chi_{f|U_1} \cdot \chi_{f|V_1}$, ἄρα οἱ ρίζες τοῦ $\chi_{f|V_1}$ εἶναι οἱ $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $d_2, \ldots, d_k$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὅλες οἱ διαφορετικὲς ἰδιοτιμὲς τοῦ $f|_{V_1}$ εἶναι οἱ $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $d_2, \ldots, d_k$. Ἐφαρμόζοντας τὴν Πρόταση 6.1 γιὰ τὸν διανυσματικὸ χῶρο V_1, τὸν τελεστή του $f|_{V_1}$ καὶ τὴν ἰδιοτιμή του λ_2 συμπεραίνομε ὅτι ὑπάρχουν ὑπόχωροι U_2, V_2 τοῦ V_1, τέτοιοι ὥστε $V_2 = U_2 \oplus V_2$ καὶ ὁ U_2 ἔχει τὶς ἰδιότητες, ποὺ ἀπαιτεῖ τὸ θεώρημα.

Ἔτσι $V = U_1 \oplus U_2 \oplus V_2$ καὶ ἐπαναλαμβάνομε τὴ διαδικασία, τώρα μὲ τὸν V_2 καὶ τὸν τελεστή του $f|_{V_2}$. Ὕστερα ἀπὸ k βήματα θὰ καταλήξομε στὴ σχέση

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus V_k, \tag{14}$$

ὅπου, γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, k$, ὁ U_j πληροῖ τὶς ἀπαιτήσεις τοῦ θεωρήματος. Μένει νὰ δείξομε ὅτι $V_k = \{0\}$. Πράγματι, εἶναι $\dim(V) = \deg(\chi_f)$ καί, ἐπειδὴ εἴμαστε πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{C}$, τὸ χ_f ἀναλύεται πλήρως σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες, ὁπότε $\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^{d_1} \cdots (X-\lambda_k)^{d_k}$, ἄρα $\dim(V) = \deg(\chi_f) = d_1+d_2+\cdots+d_k$. Συνδυάζοντας αὐτὴ τὴ σχέση μὲ την (14), ἔχομε $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = \dim(V) = \dim(U_1) + \dim(U_2) + \cdots + \dim(U_k) + \dim(V_k) = d_1 + d_2 + \cdots + d_k + \dim(V_k)$, ἄρα $\dim(V_k) = 0$ καί, συνεπῶς, $V_k = \{0\}$.

Μένει νὰ ἀποδειχθεῖ τὸ (δ′). Δύο προκαταρκτικὲς παρατηρήσεις.
Πρῶτον, γιὰ κάθε ζεῦγος δεικτῶν $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, ὁ ὑπόχωρος U_j εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν τελεστὴ $f - \lambda_i \cdot \mathrm{id}$. Προφανές, διότι ὁ U_j εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπὸ τὸν f, ἄρα, γιὰ κάθε $u_j \in U_j$ εἶναι $f(u_j) - \lambda_i u_j \in U_j$.
Δεύτερον, ἂν οἱ δεῖκτες i, j εἶναι διαφορετικοὶ καὶ γιὰ κάποια $r \in \mathbb{N}$ καὶ $u_j \in U_j$ ἔχομε $(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^r(u_j) = 0$, τότε $u_j = 0$. Πράγματι, ἂν $(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^r(u_j) = 0$, μποροῦμε, δίχως βλάβη τῆς γενικότητας, νὰ ὑποθέσομε ὅτι τὸ r εἶναι ἐλάχιστο μὲ αὐτὴ τὴν ἰδιότητα, ὁπότε $(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{r-1}(u_j) = u'_j \neq 0$ καὶ $u'_j \in U_j$ λόγῳ τῆς πρώτης παρατήρησης. Ἕπεται ὅτι $(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})(u'_j) = 0$, ἄρα $f(u'_j) = \lambda_i u'_j$. Αὐτή, ὅμως, ἡ σχέση λέει ὅτι τὸ λ_i εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ $f|_{U_j}$, κάτι ποὺ ἔρχεται σὲ ἀντίφαση μὲ τὸ (β′».
Τώρα ἐρχόμαστε στὴν κυρίως ἀπόδειξη τοῦ (δ′). Αὐτὸ ποὺ ἔχομε νὰ δείξομε εἶναι ὅτι, ἂν γιὰ κάποιο μὴ μηδενικὸ $v \in V$ καὶ κάποιο $r \in \mathbb{N}$ ἔχομε $(f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^r(v) = 0$, τότε $v \in U_j$. Λόγῳ τοῦ (α′), γράφομε $v = \sum_{i=1}^k u_i$, μὲ $u_i \in U_i$ γιὰ $i = 1, \ldots, k$. Τότε,

$$0 = (f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^r(v) = \sum_{i=1}^{k} (f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^r(u_i) = \sum_{i=1}^{k} u'_i, \quad u'_i = (f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^r(u_i) \in U_i.$$

Ἡ σχέση, ὅμως, $\sum_{i=1}^k u'_i = 0$ συνεπάγεται, λόγῳ εὐθέως ἀθροίσματος, ὅτι, γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, k$ εἶναι $u'_i = 0$ ἄρα $(f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^r(u_i) = 0$. Γιὰ $i \neq j$, ἡ δεύτερη παρατήρηση πιὸ πάνω, μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα ὅτι $u_i = 0$, ὁπότε $v = u_j \in U_j$.

□

Θεώρημα 6.8 *Ἔστω ὅτι ὁ V ὁρίζεται πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ καὶ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ εἶναι ὅλες οἱ διαφορετικὲς ἰδιοτιμὲς τ˜ου f, μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $d_1, \ldots, d_k$. Ἔστω ὅτι $U_1, \ldots, U_k$ εἶναι οἱ ὑπόχωροι, τὴν ὕπαρξη τῶν ὁποίων ἐξασφαλίζει τὸ Θεώρημα 6.7. Γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, k$, ἔστω $g_j = (f - \lambda_j \cdot \mathrm{id})|_{U_j}$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.7, ὁ g_j εἶναι μηδενοδύναμος, ὁπότε, ὁ U_j διαθέτει μία βάση, ἔστω $\mathcal{B}_j$, εἰδικῆς μορφῆς, ὅπως αὐτὴ τοῦ Θεωρήματος 6.3. Ἂν B_j εἶναι ὁ $d_j \times d_j$ πίνακας τοῦ $f|_{U_j}$ ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}_j$, τότε ὁ B_j ἔχει τὴν ἑξῆς μορφή: Ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς διαγωνίου του εἶναι λ_j καὶ κάτω ἀπὸ κάθε λ_j τῆς διαγωνίου βρίσκεται 0 ἢ 1. Ὅλα τὰ ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ B_j εἶναι 0.*

Ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$ τοῦ V εἶναι

$$\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix},$$

ὅπου στὰ κενὰ ἐννοεῖται ὅτι ὑπάρχουν μηδενικά. Ἕνας τέτοιος πίνακας λέμε ὅτι ἔχει τὴ μορφὴ Jordan.

Ἀπόδειξη Ἄμεση συνέπεια τοῦ Θεωρήματος 14 καὶ τῆς ἀπόδειξης τῆς Πρότασης 6.6.

□

Δύο παραδείγματα θὰ δείξουν μὲ σαφήνεια πῶς προκύπτει κάθε πίνακας B_j. Σὲ ὅλα τὰ παραδείγματα καὶ τὶς ἐφαρμογὲς ἔχομε κάποιον τελεστὴ f καὶ χρησιμοποιοῦμε τοὺς βοηθητικούς, τρόπόν τινα, τελεστὲς $g_j = (f - \lambda_j \cdot id)|_{U_j}$, οἱ ὁποῖοι εἶναι μηδενοδύναμοι. Ἂν q_j εἶναι ὁ δείκτης τοῦ g_j, τότε, γιὰ κάθε $u \in U_j$,

$$f(g^k(u)) = \begin{cases} \lambda_j g^k(u) + g^{k+1} & \text{ἂν } k < q_j - 1 \\ \lambda_j g^{q_j - 1}(u) & \text{ἂν } k = q_j - 1 \end{cases}. \tag{15}$$

Ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι χρήσιμη ὅταν ὑπολογίζομε τὸν πίνακα τοῦ f ὡς πρὸς τὴν εἰδικὴ βάση $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$ τοῦ Θεωρήματος 6.8.

Παράδειγμα 1. Ἔστω ὅτι κάποια ιδιοτιμὴ λ τοῦ f ἔχει πολλαπλότητα 9. Βάσει τῶν ὅσων ἔχουν ἀποδειχθεῖ μέχρι τώρα, αὐτὸ συνεπάγεται ὅτι ὑπάρχει ἕνας ὑπόχωρος U τοῦ V, διαστάσεως 9, τέτοιος ὥστε ὁ $g = (f - \lambda \cdot \mathrm{id})|_U$ εἶναι μηδενοδύναμος, δείκτη q. Ἂν ἐφαρμόσομε τὸ Θεώρημα 6.3, θὰ πάρομε μία εἰδικῆς μορφῆς βάση τοῦ ὑποχώρου U.

(α′) Ἔστω ὅτι $q = 4$ καὶ ἡ εἰδικῆς μορφῆς βάση εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$u_1, g(u_1), g^2(u_1), g^3(u_1); \quad u_2, g(u_2), g^2(u_2); \quad u_3, g(u_3)$$

(ἄρα $g^4(u_1) = 0$ καὶ ἐννοεῖται ὅτι $g^3(u_2) = 0$ καὶ $g^2(u_3) = 0$). Μὲ τὴ βοήθεια τῆς σχέσης (15) ὑπολογίζομε ὅτι ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς αὐτὴ τὴ βάση εἶναι:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(β′) Ἔστω ὅτι $q = 4$ καὶ ἡ εἰδικῆς μορφῆς βάση εἶναι

$$u_1, g(u_1), g^2(u_1), g^3(u_1); \quad u_2, g(u_2); \quad u_3, g(u_3); \quad u_4$$

(ἄρα, $g^4(u_1) = 0$ καὶ ἐννοεῖται ὅτι $g^2(u_2) = 0$, $g^2(u_3) = 0$ καὶ $g(u_4) = 0$). Τότε, ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς αὐτὴ τὴ βάση εἶναι:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2. Ἔστω ὁ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^5, \mathbb{C}^5)$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση εἶναι

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ὁ πίνακας αὐτὸς ἔχει δύο διαφορετικὲς ἰδιοτιμές, τὶς $\lambda_1 = -1$, πολλαπλότητας $d_1 = 2$ καὶ τὴ $\lambda_2 = 2$, πολλαπλότητας $d_2 = 3$.

$\underline{\lambda = -1}$. Τότε ὁ πίνακας τοῦ $f - \lambda \cdot \mathrm{id} = f + \mathrm{id}$ εἶναι $A + I_5$. Τὸ ποιὸς εἶναι ὁ ὑπόχωρος U τοῦ $\mathbb{C}^5$,ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ, μᾶς τὸ λέει ἡ Πρόταση 6.6: Εἶναι $U = Z_q = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})^q$, ὅπου q εἶναι ὁ ἐλάχιστος φυσικὸς k γιὰ τὸν ὁποῖον $Z_k = Z_{k+1}$. Ἡ ἴδια πρόταση μᾶς λέει ὅτι $\dim(U) =$ πολλαπλότητα τῆς $\lambda = 2$. Εἶναι, λοιπόν, $Z_1 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) = \mathcal{N}(A + I)$ καὶ ὑπολογίζομε ὅτι $\dim(\mathcal{N}(A + I)) = 1$. Μετά, $Z_2 = \mathrm{Ker}((f + \mathrm{id})^2) = \mathcal{N}((A + I)^2)$ καὶ ὑπολογίζομε ὅτι $\dim(\mathcal{N}(A + I)^2) = 2$. Ἄρα $U = Z_2$. Μία βάση τοῦ $\mathcal{N}((A + I)^2)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ διανύσματα $(-1, -1, 0, -1, 1)$ καὶ $(0, 0, 1, 0, 0)$. Ἔστω $u_{11} = (-1, -1, 0, -1, 1)$, ὁπότε $g(u_{11}) = (1, 1, -1, 1, -1) \neq 0$, συνεπῶς μία εἰδικὴ βάση τοῦ U εἶναι ἡ $\{u_{11}, g(u_{11})\}$. Παρατηρῆστε ὅτι, $u_{11} \in U = Z_2$, ἄρα $g^(u_{11}) = 0$. Ὁ πίνακας τοῦ $f|_U$, ὡς πρὸς τὴ βάση $\{u_{11}, g(u_{11})\}$, εἶναι

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\lambda = 2}$. Τότε ὁ πίνακας τοῦ $f - \lambda \cdot \mathrm{id} = f - 2 \cdot \mathrm{id}$ εἶναι $A - 2I_5$. Ὁ ὑπόχωρος U τοῦ $\mathbb{C}^5$,ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὴ τὴν ἰδιοτιμή, ἔχει διάσταση ἴση μὲ τὴν πολλαπλότητα τῆς ἰδιοτιμῆς, δηλαδὴ 3, καὶ ὑπολογίζεται, ὅπως πρίν, βάσει τῆς Πρότασης 6.6: Εἶναι $Z_1 = \mathrm{Ker}(f - 2 \cdot \mathrm{id}) = \mathcal{N}(A - 2I)$ καὶ ὑπολογίζομε ὅτι $\dim(\mathcal{N}(A + I)) = 2$. Μετά, $Z_2 = \mathrm{Ker}((f - 2 \cdot \mathrm{id})^2) = \mathcal{N}((A - 2I)^2)$ καὶ ὑπολογίζομε ὅτι $\dim(\mathcal{N}(A - 2I)^2) = 3$. Ἄρα $U = Z_2$. Μία βάση τοῦ $\mathcal{N}((A - 2I)^2)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ διανύσματα $(1, 0, -1, 0, 1), (1, 0, -1, 1, 0)$ καὶ $(0, 1, 0, 0, 0)$. Ἔστω $u_{12} = (1, 0, -1, 0, 1)$. Ὑπολογίζομε ὅτι $g(u_{12}) = (-1, -1, 1, -2, 1) \neq 0$ καὶ $g^2(u_{12}) = 0$. Ἄρα, γιὰ τὴν εἰδικὴ βάση μας, σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση, χρειαζόμαστε ἕνα ἐπιπλέον διάνυσμα $u_{22} \notin \langle u_{12}, g(u_{12}) \rangle$ μὲ $g(u_{22}) = 0$. Ἕνα τέτοιο διάνυσμα εἶναι τὸ δεύτερο στοιχεῖο τῆς παραπάνω βάσης: $u_{22} = (1, 0, -1, 1, 0)$. Συνεπῶς μία εἰδικὴ βάση τοῦ U εἶναι ἡ $\{u_{12}, g(u_{12}), u_{22}\}$, ὅπου $g^2(u_{12}) = 0$ καὶ $g(u_{22}) = 0$. Ὁ πίνακας τοῦ $f|_U$, ὡς πρὸς αὐτὴ τὴ βάση ὑπολογίζεται πολὺ ἁπλὰ ὅτι εἶναι:

$$B_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τελικὸ συμπέρασμα: Ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ βάση

$$u_{11}, g(u_{11}), \quad u_{12}, g(u_{12}), u_{22}$$

εἶναι

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ἕνα τέχνασμα. Ὅταν μᾶς ἐνδιαφέρει μόνο ὁ πίνακας Jordan ἑνὸς τελεστῆ, ἀλλὰ ὄχι ἡ βάση, ὡς πρὸς τὴν οποία ὁ τελεστὴς ἔχει αὐτὸν τὸν πίνακα, μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἔστω λ μιὰ ἰδιοτιμὴ τοῦ f. Θέλομε νὰ ὑπολογίσομε τὸ μπλὸκ τύπου Jordan, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λ. Ἔστω U ὁ ὑπόχωρος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λ καὶ $g = f - \lambda \cdot \mathrm{id}$. Ὁ g, ὅπως ξέρομε, εἶναι μηδενοδύναμος καὶ ἔστω q ὁ δείκτης του. Αυτὸ ποὺ κάνομε στὰ μέχρι τώρα (ἀλλὰ καὶ στὰ ἑπόμενα) παραδείγματά μας, εἶναι νὰ ὑπολογίζομε τὴν εἰδικὴ βάση, ἔστω $\mathcal{B}$, τοῦ U, ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὁ $f|_U$ ἔχει πίνακα τῆς μορφῆς Jordan. Γιὰ κάθε $i \in \mathbb{N}$ θέτομε

$$\nu_i = \text{πλῆθος τῶν στοιχείων } u \text{ τῆς } \mathcal{B}, \text{ γιὰ τὰ ὁποία } g^i(u) = 0 \text{ καὶ } g^{i-1}(u) \neq 0.$$

Προφανῶς, $\nu_i = 0$ γιὰ κάθε $i > q$. Λόγου χάρη, στὸ Παράδειγμα 1(α′) τῆς σελίδας 36, εἶναι

- $\nu_1 = 3$ διότι τὰ διανύσματα $g^3(u_1), g^2(u_2), g(u_3)$, καὶ μόνο αὐτά, ἀπεικονίζονται στὸ 0 μέσῳ τῆς g.
- $\nu_2 = 3$ διότι τὰ διανύσματα $g^2(u_1), g(u_2), u_3$, καὶ μόνο αὐτά, ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπεικονίζονται στὸ 0 μέσῳ τῆς g^2 καὶ νὰ μὴν ἀπεικονίζονται στὸ 0 μέσῳ τῆς g.
- $\nu_3 = 2$ διότι τὰ διανύσματα $g(u_1), u_2$, καὶ μόνο αὐτά, ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπεικονίζονται στὸ 0 μέσῳ τῆς g^3 καὶ νὰ μὴν ἀπεικονίζονται στὸ 0 μέσῳ τῆς g^2.
- $\nu_4 = 1$ διότι τὸ διάνυσμα u_1, καὶ μόνο αὐτό, ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπεικονίζεται στὸ 0 μέσῳ τῆς g^4 καὶ νὰ μὴν ἀπεικονίζεται στὸ 0 μέσῳ τῆς g^3.
- $\nu_i = 0$ γιὰ κάθε $i > 4$.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσομε τὸν πίνακα τοῦ $f|_U$ ὡς πρὸς τὴν εἰδικὴ βάση, ἔστω $\mathcal{B}$, τῶν παραπάνω $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$ τὸ πλῆθος διανυσμάτων, πρέπει νὰ ὑπολογίσομε ὅλες τὶς εἰκόνες $f(u)$ μὲ $u \in \mathcal{B}$. Θὰ κάνομε χρήση τῆς σχέσης (15), ἡ ὁποία, στὴν περίπτωσή μας εἶναι ἡ

$$f(g^k(u)) = \begin{cases} \lambda g^k(u) + g^{k+1}(u) & \text{γιὰ } k = 0, 1, 2 \\ \lambda g^3(u) & \text{γιὰ } k = 3 \end{cases}$$

- Ἂν κάποιο u ἀνήκει στὰ ν_1 πρῶτα διανύσματα τῆς βάσης, τότε ἡ στήλη συντελεστῶν τοῦ $f(u)$, ὡς πρὸς τὴ βάση, ἔχει τὴ μορφὴ

τὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}$	$f(u)$
$\cdot$	
u	λ
$\cdot$	0
$\cdot$	

ὅπου, στὴν πρώτη στήλη τὰ $\cdot$ συμβολίζουν τὰ πρὶν καὶ τὰ μετὰ τὸ u διανύσματα τῆς βάσης, ἐνῶ στὴ δεύτερη στήλη τὰ κενὰ πάνω ἀπ' τὸ λ καὶ κάτω ἀπὸ τὸ 0 ἐννοοῦνται μηδενικά.

- Ἂν κάποιο u ἀνήκει στὰ ν_2 ἑπόμενα διανύσματα τῆς βάσης, τότε ἡ στήλη συντελεστῶν τοῦ $f(u)$, ὡς πρὸς τὴ βάση, ἔχει τὴ μορφὴ

τὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}$	$f(u)$
$\cdot$	
u	λ
$g(u)$	1
$\cdot$	

ὅπου, στὴν πρώτη στήλη τὰ $\cdot$ συμβολίζουν τὰ πρὶν τὸ u καὶ τὰ μετὰ τὸ $g(u)$ διανύσματα τῆς βάσης, ἐνῶ στὴ δεύτερη στήλη τὰ κενὰ πάνω ἀπ' τὸ λ καὶ κάτω ἀπὸ τὸ 1 ἐννοοῦνται μηδενικά.

• Ἂν κάποιο u ἀνήκει στὰ v_3 ἑπόμενα διανύσματα τῆς βάσης, τότε οἱ στῆλες συντελεστῶν τῶν $f(u)$ καὶ $f(g(u))$, ὡς πρὸς τὴ βάση, εἶναι

τὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}$	$f(u)$	$f(g(u))$
$\cdot$		
u	λ	0
$g(u)$	1	λ
$g^2(u)$	0	1
$\cdot$	0	0
$\cdot$		

• Ἂν κάποιο u ἀνήκει στὰ v_4 ἑπόμενα διανύσματα τῆς βάσης (στὸ παράδειγμά μας, μόνο ἕνα τέτοιο διάνυσμα ὑπάρχει), τότε οἱ στῆλες συντελεστῶν τῶν $f(u)$, $f(g(u))$ καὶ $f(g^2(u))$, ὡς πρὸς τὴ βάση, εἶναι

τὰ διανύσματα τῆς $\mathcal{B}$	$f(u)$	$f(g(u))$	$f(g^2(u))$
$\cdot$			
u	λ	0	0
$g(u)$	1	λ	0
$g^2(u)$	0	1	λ
$\cdot$	0	0	1
$\cdot$	0	0	0
$\cdot$			

Μποροῦμε, λοιπόν, νὰ δώσομε στὰ v_i τὴν ἑξῆς "ἑρμηνεία", ἡ ὁποία σχετίζεται μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς "διαγωνίου ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὰ λ", ἢ "δεύτερης διαγωνίου" (θὰ χρησιμοποιοῦμε αὐτοὺς τοὺς ὅρους). Τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων αὐτῆς τῆς "δεύτερης διαγωνίου" εἶναι ἕνα λιγότερο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς (κύριας διαγωνίου), δηλαδή, ἀπὸ τὰ λ. Μὲ τὸν παραστατικὸ ὅρο "*παρέα ἀπὸ* 1" στὴ δεύτερη διαγώνιο, ἐννοοῦμε μιὰ διαδοχὴ ἀπὸ συνεχόμενα 1 (ποὺ δὲν παρεμβάλλεται ἀνάμεσά τους τὸ 0).

- v_1 εἶναι τὸ πλῆθος τῶν λ, ποὺ ἀπὸ κάτω τους δὲν ἔχουν 1, ἄρα, ἢ τὸ λ δὲν εἶναι τὸ τελευταῖο στοιχεῖο τῆς διαγωνίου καὶ ἔχει ἀπὸ κάτω του 0, ἢ εἶναι τὸ τελευταῖο λ τῆς διαγωνίου. Συνεπῶς, ἀκριβῶς $\nu_1 - 1$ μηδενικὰ βρίσκονται στὴ δεύτερη διαγώνιο.

- Τὸ ν_2 δείχνει πόσες "παρέες" στὴ δεύτερη διαγώνιο ἔχουν ἕνα *τουλάχιστον* 1.
- Τὸ ν_3 δείχνει πόσες "παρέες" στὴ δεύτερη διαγώνιο ἔχουν δύο *τουλάχιστον* 1.
- Τὸ ν_4 δείχνει πόσες "παρέες" στὴ δεύτερη διαγώνιο ἔχουν τρία *τουλάχιστον* 1.

κ.ο.κ.

Δηλαδή, γενικά, τὸ ν_i ($i \geq 2$) μᾶς λέει πόσες παρέες στὴ δεύτερη διαγώνιο ἔχουν *τουλάχιστον* $i - 1$ τὸ πλῆθος διαδοχικὰ 1.

Στὸ συγκεκριμένο παράδειγμα, ἡ διαγώνιος κάτω ἀπὸ τὰ λ ἔχει 8 στοιχεῖα, ποὺ ξέρομε ὅτι εἶναι 0 ἢ 1. Τὸ $\nu_1 = 3$ μᾶς λέει ὅτι ἀκριβῶς δύο εξ αὐτῶν εἶναι 0. Τὸ $\nu_4 = 1$ μᾶς λέει ὅτι στὴ δεύτερη διαγώνιο ὑπάρχει μία παρέα μὲ τρία διαδοχικὰ 1, ἀλλὰ παρέα μὲ τέσσερα διαδοχικὰ 1 δὲν ὑπάρχει, ἀφοῦ $\nu_5 = 0$. Ἄρα, ἡ δεύτερη διαγώνιος εἶναι τῆς μορφῆς $1110 * * * *$.
Τὸ $\nu_3 = 2$ μᾶς λέει ὅτι στὴ δεύτερη διαγώνιο ὑπάρχουν δύο παρέες μὲ δύο (τουλάχιστον) διαδοχικὰ 1. Ἤδη ἔχομε πάρει τὴ μία παρέα, μόλις πρίν, ἄρα μένει ἄλλη μία. Ἔτσι, ἡ δεύτερη διαγώνιος προσδιορίζεται ἀκριβέστερα ὡς: $1110110*$. Ὅμως, παραπάνω εἴδαμε ὅτι ἡ δεύτερη διαγώνιος ἔχει ἀκριβῶς δύο μηδενικά, ἄρα τὸ $*$ εἶναι, ὑποχρεωτικά, 1. Ἐναλλακτικά, ἀφοῦ $\nu_2 = 3$, ἕπεται ὅτι τρεῖς παρέες στὴ δεύτερη διαγώνιο ἔχουν 1. Ἤδη ἔχομε πάρει τὶς δύο (τὴν 111 καὶ τὴν 11), ἄρα μένει μία, ποὺ σημαίνει ὅτι στὴ θέση τοῦ $*$ πρέπει νὰ βάλομε 1.
Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο καταφέραμε νὰ προσδιορίσομε ἀκριβῶς τὴ δεύτερη διαγώνιο ὡς 11101101, χωρὶς νὰ ὑπολογίσομε τὰ στοιχεῖα τῆς εἰδικῆς βάσης $\mathcal{B}$.

Πρακτικὸς ὑπολογισμὸς τῶν ν_i. Ἂς ἐπιστρέψομε στὴ σελίδα 38, στὴν ἀρχικὴ περιγραφὴ τοῦ τρόπου μὲ τὸν ὁποῖον ἐπιλέξαμε τὰ ν_1 διανύσματα τῆς εἰδικῆς βάσης $\mathcal{B}$, ὕστερα τὰ ἑπόμενα ν_2 διανύσματα κ.ο.κ. Εἶναι φανερὸ ὅτι τὰ πρῶτα ν_1 διανύσματα εἶναι βάση τοῦ $\mathrm{Ker}(g|_U)$. Αὐτὰ τὰ ν_1 διανύσματα μαζὶ μὲ τὰ ἑπόμενα ν_2, εἶναι βάση τοῦ $\mathrm{Ker}(g^2|_U)$. Στὴ συνέχεια, τὰ $\nu_1 + \nu_2$ πρῶτα διανύσματα, μαζὶ μὲ τὰ ἑπόμενα ν_3, εἶναι βάση τοῦ $\mathrm{Ker}(g^3|_U)$, κ.ο.κ.. Ἄρα

$$\nu_1 = \dim(\mathrm{Ker}(g|_U)), \quad \nu_1 + \nu_2 = \dim(\mathrm{Ker}(g^2|_U)), \quad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \dim(\mathrm{Ker}(g^3|_U)), \ldots$$

Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.7 (δ′) ξέρομε ὅτι $\mathrm{Ker}(g|_U) = \mathrm{Ker}(g)$ καί, γενικά, $\mathrm{Ker}(g^k|_U) = \mathrm{Ker}(g^k)$, ὁπότε, γιὰ κάθε $k = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(g^k|_U) &= \dim(\mathcal{N}((A - \lambda I)^k)) \\ &= \text{πλῆθος μηδενικῶν γραμμῶν τοῦ κλιμακωτοῦ πίνακα τοῦ } (A - \lambda I)^k.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τὶς δύο παραπάνω σχέσεις προσδιορίζομε εὔκολα τὰ ν_i.

Ἂς ξαναδοῦμε τὸ παράδειγμα 2 τῆς σελίδας 37 ὑπὸ τὸ πρίσμα αὐτῆς τῆς τεχνικῆς:

$\underline{\lambda = -1}$. Ἡ πολλαπλότητα τῆς ἰδιοτιμῆς εἶναι 2, ἄρα τὸ μπλόκ Jordan εἶναι 2×2, ἔχει στὴ διαγώνιο τὰ στοιχεῖα $-1, -1$ καὶ στὴ δεύτερη διαγώνιο ἕνα μόνο στοιχεῖο, ποὺ πρέπει ν' ἀποφασίσομε ἂν εἶναι 0 ἢ 1. Ὑπολογίζομε:

$$\text{κλιμακωτὸς τοῦ } A + I_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 9/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

μία μηδενικὴ γραμμή, ἄρα $\nu_1 = 1$.

$$\text{κλιμακωτὸς τοῦ } (A + I_5)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -27/2 & -27/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δύο μηδενικὲς γραμμές, ἄρα $\nu_1 + \nu_2 = 2$. Συνεπῶς $\nu_1 = \nu_2 = 1$. Τὸ $\nu_1 = 1$ λέει ὅτι $\nu_1 - 1 = 0$ στοιχεῖα τῆς δεύτερης διαγωνίου εἶναι μηδενικά, ἄρα τὸ μοναδικὸ στοιχεῖο τῆς δεύτερης διαγωνίου εἶναι 1. Ἐναλλακτικά, τὸ $\nu_2 = 1$ λέει ὅτι μία παρέα τῆς δεύτερης διαγωνίου ἔχει ἕνα 1, ἄρα τὸ μοναδικὸ στοιχεῖο τῆς δεύτερης διαγωνίου εἶναι 1.

$\underline{\lambda = 2}$. Ἡ πολλαπλότητα τῆς ἰδιοτιμῆς εἶναι 3, ἄρα τὸ μπλόκ Jordan εἶναι 3×3, ἔχει στὴ διαγώνιο τὰ στοιχεῖα $2, 2, 2$ καὶ στὴ δεύτερη διαγώνιο δύο στοιχεῖα, ποὺ πρέπει ν' ἀποφασίσομε ἂν εἶναι 0 ἢ 1. Ὑπολογίζομε:

$$\text{κλιμακωτὸς τοῦ } A - 2I_5 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3/4 & -9/4 & -9/4 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δύο μηδενικὲς γραμμές, ἄρα $\nu_1 = 2$.

$$\text{κλιμακωτὸς τοῦ } (A - 2I_5)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 6 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 27/5 & 27/5 & 27/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

τρεῖς μηδενικὲς γραμμές, ἄρα $\nu_1 + \nu_2 = 3$. Ὁ κλιμακωτὸς τοῦ $(A - 2I_5)^3$ ἔχει τρεῖς μηδενικὲς γραμμές, ἄρα $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 3$. Συνεπῶς, $\nu_1 = 2, \nu_2 = 1, \nu_3 = 0$. Ἀπὸ τὸ $\nu_1 = 2$

συμπεραίνομε ὅτι $\nu_1 - 1 = 1$, ἄρα ἀπὸ τὰ δύο στοιχεῖα τῆς δεύτερης διαγωνίου, τὸ ἕνα ἀκριβῶς εἶναι 0. Ἄρα, τὰ στοιχεῖα τῆς δεύτερης διαγωνίου εἶναι $1, 0$. Ἐναλλακτικά, τὸ $\nu_2 = 1$ μᾶς λέει ὅτι μία παρέα τῆς δεύτερης διαγωνίου ἔχει ἕνα τουλάχιστον 1. Ὅμως, $\nu_3 = 0$, ποὺ λέει ὅτι δὲν ὑπάρχει παρέα μὲ δύο συνεχόμενα 1, ἄρα τὰ στοιχεῖα τῆς δεύτερης διαγωνίου εἶναι $1, 0$.

Βάσει τῶν παραπάνω καταλήγομε στὸν πίνακα Jordan τῆς σελίδας 38.

Ἄσκηση 26 *Ἔστω ὅτι ἡ εἰδικὴ βάση, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ, εἶναι*

$$\begin{cases} u_1, g(u_1), g^2(u_1), g^3(u_1), & (g^4(u_1) = 0) \\ u_2, g(u_2), g^2(u_2), & (g^3(u_2) = 0) \\ u_3, g(u_3), g^2(u_3), & (g^3(u_3) = 0) \\ u_4, g(u_4), & (g^2(u_4) = 0) \\ u_5, g(u_5), & (g^2(u_5) = 0) \\ u_6 & (g(u_6) = 0) \\ u_7 & (g(u_7) = 0) \end{cases}$$

Ποιὰ εἶναι ἡ διάταξη τῶν στοιχείων τῆς ‘‘διαγωνίου κάτω ἀπ’ τὰ λ’’;

Ἀπάντηση: 111011011010100.

Κανονικὴ μορφὴ Jordan ἑνὸς πίνακα. Ὅταν μᾶς δίδεται ἕνας $n \times n$ πίνακας A μὲ πραγματικὰ ἢ μιγαδικὰ στοιχεῖα, ἔμμεσα μᾶς δίδεται ἕνας τελεστὴς $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν πίνακα A. Πιὸ συγκεκριμένα, ὁ f εἶναι ὁ τελεστής, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση $\mathcal{E}$ τοῦ $\mathbb{C}^n$, εἶναι ὁ A:

$$A_{f/\mathcal{E}} = A. \tag{16}$$

Ὅταν, λοιπόν, μιλᾶμε γιὰ τὴν «κανονικὴ μορφὴ Jordan τοῦ πίνακα A», ἐννοοῦμε τὸν πίνακα Jordan τοῦ συγκεκριμένου τελεστῆ f, ἔστω J, γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὁποίου ἀκολουθοῦμε τὴ διαδικασία τῶν προηγουμένων σελίδων. Τὸ χαρακτηριστικὸ αὐτῆς τῆς διαδικασίας εἶναι ὅτι, γιὰ κάθε ἰδιοτιμὴ λ τοῦ f, ἔστω πολλαπλοτητας d, ὑπολογίζομε τὸν ὑπόχωρο

$$U_\lambda = \mathcal{N}((A - \lambda \cdot I_n)^k),$$

ὅπου τὸ k ἔχει τὴν ἰδιότητα $\dim(\mathcal{N}((A - \lambda \cdot I_n)^k)) = d$, καὶ μετά, μία εἰδικὴ βάση $\mathcal{B}_\lambda$ τοῦ U_λ, τῆς μορφῆς

$$\mathcal{B}_\lambda = \begin{cases} u_1, g(u_1), \ldots, g^{q_1 - 1}(u_1), g^3(u_1), & (g^{q_1}(u_1) = 0) \\ u_2, g(u_2), \ldots, g^{q_2 - 1}(u_2), g^3(u_1), & (g^{q_2}(u_2) = 0) \\ \vdots & \end{cases} \tag{17}$$

Ἡ ἕνωση ὅλων τῶν βάσεων $\mathcal{B}_\lambda$, καθὼς τὸ λ διατρέχει τὶς ἰδιοτιμὲς τοῦ f (δηλαδή, τὶς ἰδιοτιμὲς τοῦ A) μᾶς δίνει μία εἰδικὴ βάση $\mathcal{B}$ τοῦ $\mathbb{C}^n$, ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὁ πίνακας τοῦ f εἶναι πίνακας Jordan, ἔστω J, δηλαδή,

$$A_{f/\mathcal{B}} = J. \tag{18}$$

Ὁ πίνακας μετάβασης P ἀπό τὴ $\mathcal{B}$ στὴν $\mathcal{E}$ εἶναι, προφανῶς, ἐκεῖνος ὁ $n \times n$ πίνακας, ὁ ὁποῖος ἔχει γιὰ στῆλες του τὶς συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων τῆς βάσης $\mathcal{B}$. Ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 3.3 στὶς βάσεις $\mathcal{E}$ καὶ $\mathcal{B}$ καὶ κάνοντας χρήση τῶν (16) καὶ (18), ἔχομε

$$J = A_{f/\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot A_{f/\mathcal{E}} \cdot P = P^{-1}AP. \tag{19}$$

Παραπάνω, στὴν ἑνότητα μὲ τῖτλο *Ἕνα τέχνασμα*, δείξαμε πῶς μποροῦμε νὰ ὑπολογίσομε τὸ μπλόκ τοῦ πίνακα Jordan τοῦ f, τὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ, δίχως νὰ ὑπολογίσομε συγκεκριμένα τὴν εἰδικὴ βάση $\mathcal{B}_\lambda$ τοῦ U_λ. Μποροῦμε, ἔτσι, νὰ ὑπολογίσομε τὸν J, ἀλλὰ ὄχι τὸν P, γιὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέση (19). Ἄν, ὅμως, ξέρομε καὶ τὴν εἰδικὴ βάση $\mathcal{B}$, τότε μποροῦμε νὰ ὑπολογίσομε καὶ τὸν P (βλ. ἄσκηση 28).

Ἕνα παράδειγμα. Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ κανονικὴ μορφὴ Jordan J τοῦ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & \lambda & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & \lambda & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad a_1 b_2 c_3 \neq 0,$$

καθὼς καὶ ἀντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ὥστε $P^{-1}AP = J$.

Λύση. Καθὼς ὁ πίνακας εἶναι ἄνω τριγωνικός, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου του γίνεται «μὲ τὸ μάτι»: $(X - \lambda)^4$, ἄρα μοναδικὴ ἰδιοτιμὴ τοῦ πίνακα εἶναι ἡ λ, πολλαπλότητας 4. Ὁ πίνακας J, λοιπόν, ἔχει μόνο ἕνα μπλόκ· αὐτὸ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ. Ὁ ὑπόχωρος U τοῦ $\mathbb{C}^4$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λ, ἔχει διάσταση ἴση μὲ τὴν πολλαπλότητα τῆς λ, ἄρα 4. Συνεπῶς, $U = \mathbb{C}^4$. Ὑπολογίζομε τοὺς μηδενοχώρους $\mathcal{N}((A - \lambda \cdot I_4)^k)$ μέχρις ὅτου βροῦμε μηδενόχωρο διαστάσεως 4. Ὁ $A - \lambda \cdot I_4$ ἔχει πολλὰ μηδενικά, ὁπότε οἱ πράξεις εἶναι πολὺ εὔκολες «μὲ τὸ χέρι». Ἐπιπλέον, οἱ πίνακες $(A - \lambda \cdot I_4)^k$ εἶναι ἕτοιμοι σὲ κλιμακωτὴ μορφὴ καὶ αὐτὸ μᾶς διευκολύνει ἀκόμη περισσότερο. Τὰ ν_i, παρακάτω, εἶναι αὐτὰ γιὰ τὰ ὁποῖα γίνεται λόγος στὴ σελίδα 40 καὶ ἑξῆς. Ὑπολογίζομε:

$$A - \lambda \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = \dim(\mathcal{N}(A - \lambda \cdot I_4)) = 1$$

$$(A - \lambda \cdot I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 b_2 & a_1 b_3 + a_2 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 + \nu_2 = \dim(\mathcal{N}((A - \lambda \cdot I_4)^2)) = 2$$

$$(A-\lambda\cdot I_4)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&a_1b_2c_3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \nu_1+\nu_2=\dim(\mathcal{N}((A-\lambda\cdot I_4)^3))=3$$

$$(A-\lambda\cdot I_4)^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\dim(\mathcal{N}((A-\lambda\cdot I_4)^4))=4.$$

Ἄρα $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=1$. Τὸ $n_4=1$ μᾶς λέει ὅτι, στὴ δεύτερη διαγώνιο ὑπάρχει μία παρέα μὲ τουλάχιστον τρία 1. Καθώς, ὅμως, ἡ δεύτερη διαγώνιος ἔχει τρία στοιχεῖα, συμπεραίνομε ὅτι τὰ στοιχεῖα της εἶναι 1, 1, 1, ἄρα

$$J=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\1&\lambda&0&0\\0&1&\lambda&0\\0&0&1&\lambda\end{pmatrix}.$$

Ἡ σχέση $\nu_1=1$ μᾶς λέει ὅτι ὁ $U(=\mathbb{C}_4)$ ἔχει μία εἰδικὴ βάση τῆς μορφῆς $u_1, g(u_1), g^2(u_1), g^3(u_1)$, μὲ $g^4(u_1)=0$ καὶ $g^k(u_1)\neq 0$ γιὰ $k=0,\ldots,3$.[18] ὅπου, ὅπως συνήθως, $[g(u)]=(A-\lambda\cdot I_4)[u]$.[19]
Ἂν πάρομε $u_1=(0,0,0,1)$, τότε, ἕνας ἁπλὸς ὑπολογισμὸς μᾶς δίνει

$$g(u_1)=(a_3,b_3,c_3,0),\quad g^2(u_1)=(a_1b_3+a_2c_3,b_2c_3,0,0),\quad g^3(u_1)=(a_1b_2c_3,0,0,0),$$

καὶ $g^4(u_1)=0$, ἄρα τὸ $u_1=(0,0,0,1)$ ἱκανοποιεῖ τὶς ἀπαιτήσεις τῆς εἰδικῆς βάσης. Ὅπως ἔχομε ἤδη 'πεῖ ἀμέσως μετὰ τὴ σχέση (18), ζητούμενος πίνακας P εἶναι αὐτὸς μὲ στῆλες τὶς συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων τῆς εἰδικῆς βάσης. Ἄρα,

$$P=\begin{pmatrix}0&a_3&a_1b_3+a_2c_3&a_1b_2c_3\\0&b_3&b_2c_3&0\\0&c_3&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Στὶς παρακάτω ἀσκήσεις δίδεται πίνακας A καὶ ζητεῖται ἡ κανονικὴ μορφὴ Jordan τοῦ A. Συμβουλευθεῖτε τὴν παραπάνω ὑπο-ενότητα *Κανονικὴ μορφὴ Jordan ἑνὸς πίνακα* καὶ ἐργαστεῖτε ὅπως στὸ παράδειγμα τῆς σελίδας 42.

Ἄσκηση 27 *Ὑπολογῖστε τὴν κανονικὴ μορφή Jordan τοῦ πίνακα A (μὲ στοιχεῖα στὸ $\mathbb{R}$) σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις:*

[18] Ξαναδεῖτε τὸ Παράδειγμα 1 τῆς σελίδας 36.
[19] Ὑπενθυμίζεται ὅτι χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $[x]$ γιὰ τὴ στήλη συντεταγμένων τοῦ x.

(α′) $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -5 & 6 & 4 \\ 3 & -23 & -21 & 30 & 4 \\ 3 & -21 & -21 & 29 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Δίδεται ἡ πληροφορία ὅτι ἡ μοναδικὴ ἰδιοτιμὴ τοῦ A εἶναι ἡ 2, μὲ πολλαπλότητα 5.

Ἀπάντηση: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

(β′) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Δίδονται οἱ ἑξῆς πληροφορίες: Οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A εἶναι $1, -1, 2$, μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $1, 2, 2$. Ὁ μηδενόχωρος τοῦ $A + I_5$ ἔχει διάσταση 1 καὶ ὁ μηδενόχωρος τοῦ $(A + I_5)^2$ ἔχει διάσταση 2. Ὁ μηδενόχωρος τοῦ $A - 2I_5$ ἔχει διάσταση 1 καὶ ὁ μηδενόχωρος τοῦ $(A - 2I_5)^2$ ἔχει διάσταση 2.

Ἀπάντηση: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

(γ′) $$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 3 & -1 & -10 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Δίδονται οἱ ἑξῆς πληροφορίες: Οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A εἶναι $2, 3$, μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $2, 4$. Ὁ μηδενόχωρος τοῦ $A - 2I_6$ ἔχει διάσταση 1 καὶ ὁ μηδενόχωρος τοῦ $(A - 2I_6)^2$ ἔχει διάσταση 2. Γιὰ $k = 1, \dots, 4$, ὁ μηδενόχωρος τοῦ $(A - 3I_6)^k$ ἔχει διάσταση k.

Ἀπάντηση: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

(δ′) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 0 & -8 \\ -12 & -11 & 18 & -9 & 21 \\ 9 & 9 & -13 & 9 & -14 \\ 9 & 9 & -12 & 7 & -15 \\ -9 & -9 & 10 & -9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Δίδονται οἱ ἑξῆς πληροφορίες: Οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A εἶναι $-3, 1, -2$, μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $1, 2, 2$. Ὁ μηδενόχωρος τοῦ $A - I_5$ ἔχει διάσταση 2. καὶ ὁ μηδενόχωρος τοῦ $A + 2I_5$ ἔχει, ἐπίσης, διάσταση 2.

Ἀπάντηση: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

(ε′) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Δίδονται οἱ ἑξῆς πληροφορίες: Οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A εἶναι $-2, 2, 1$, μὲ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $1, 1, 3$. Ὁ μηδενόχωρος τοῦ $A - I_5$ ἔχει διάσταση 2. καὶ ὁ μηδενόχωρος τοῦ $(A - I_5)^2$ ἔχει διάσταση 3.

Ἀπάντηση: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ἄσκηση 28 *Ἔστω* $$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(α′) *Ὑπολογῖστε τὶς ἰδιοτιμὲς τοῦ A καὶ τὶς πολλαπλότητές τους.*
(β′) *Γιὰ κάθε ἰδιοτιμὴ λ ὑπολογῖστε τοὺς μηδενόχωρους $\mathcal{N}((A - \lambda \cdot I_4)^k$, μέχρις ἐκεῖνο τὸ k ποὺ θὰ σᾶς δώσει $\dim(\mathcal{N}((A - \lambda \cdot I_4)^k)$ = πολλαπλότητα τῆς λ.*
(γ′) *Ἔστω λ ἡ μεγαλύτερη ἰδιοτιμή, d ἡ πολλαπλότητά της καὶ g ὁ τελεστὴς g, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν πίνακα $A - \lambda \cdot I_4$. Ἔστω, ἀκόμη, $u = (0, 0, 1, 0)$. Παρατηρῆστε ὅτι τὰ διανύσματα $u, \ldots, g^{d-1}(u)$ εἶναι μὴ μηδενικὰ καὶ ἀνήκουν στὸν $\mathcal{N}((A - \lambda \cdot I_4)^d$.*
(δ′) *Βάσει τῶν παραπάνω, ὑπολογῖστε τὸν πίνακα Jordan J τοῦ A, καθὼς καὶ 4×4 πίνακα P, τέτοιον ὥστε, $P^{-1}AP = J$.*

Ἀπάντηση (μερική): $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -14 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

῾Ορολογία-σύμβαση. Λέμε ὅτι δύο πίνακες σὲ μορφὴ Jordan εἶναι ἴδιοι, ἂν ἕνα πρὸς ἕνα τὰ μπλόκ τους εἶναι ἴσα, ἀλλά, ἐνδεχομένως, στὸν πίνακα εἶναι τοποθετημένα μὲ διαφορετικὴ διάταξη. Γιὰ παράδειγμα, οἱ δύο παρακάτω πίνακες Jordan θὰ ποῦμε ὅτι εἶναι ἴδιοι:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Γιὰ τὸ Θεώρημα 6.10 θὰ χρειαστοῦμε τὴν ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση 6.9 *῞Ομοιοι (τετραγωνικοί, ἴσης διάστασης) πίνακες ἔχουν μηδενόχωρους τῆς ἴδιας διάστασης.*

Ἀπόδειξη ῎Εστω $B = P^{-1}AP$. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 2.8 (α΄) τῶν σημειώσεων [5] ἔχομε ὅτι $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}((P^{-1}A)P) = \mathcal{R}(P^{-1}A)$,[20] ἄρα $\dim(\mathcal{R}(B)) = \dim(\mathcal{R}(P^{-1}A))$. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 2.8 (β΄) τῶν σημειώσεων [5] ξέρομε ὅτι $\dim(\mathcal{R}(P^{-1}A)) = \dim(\mathcal{R}(A))$, ἄρα $\dim(\mathcal{R}(B)) = \dim(\mathcal{R}(A))$. Μ’ ἄλλα λόγια, οἱ πίνακες A, B ἔχουν τὴν ἴδια τάξη, ἄρα οἱ διαστάσεις τῶν μηδενοχώρων τους εἶναι ἴσες.

□

Θεώρημα 6.10 *Δύο πίνακες μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ $\mathbb{C}$ ἔχουν ἴδιους πίνακες Jordan, ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι ὅμοιοι.*

Ἀπόδειξη ῎Εστω ὅτι οἱ πίνακες A, B εἶναι ὅμοιοι. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 4.2, τὰ χαρακτηριστικὰ πολυώνυμα τῶν A καὶ B εἶναι ὅμοια, ἄρα μία πρὸς μία οἱ ἰδιοτιμές τους καὶ οἱ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες εἶναι ἴσες. ῎Εστω, λοιπόν, λ μία ἰδιοτιμὴ καὶ d ἡ πολλαπλότητά της. Θὰ δείξομε ὅτι τὸ μπλόκ τοῦ πίνακα Jordan, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λ εἶναι τὸ ἴδιο καὶ στοὺς δύο πίνακες. Ἀρκεῖ νὰ δείξομε ὅτι τὰ στοιχεῖα τῆς δεύτερης διαγωνίου τοῦ μπλόκ, τὰ ὁποῖα ὑπολογίζομε ξεκινώντας ἀπὸ τὸν πίνακα A, εἶναι ἀκριβῶς τὰ ἴδια μὲ τὰ ἀντίστοιχά τους, ποὺ ὑπολογίζομε ἂν ξεκινήσομε τὴ διαδικασία ἀπὸ τὸν πίνακα B. Πράγματι, ἀπὸ ὅσα ἔχομε ’δεῖ στὰ προηγούμενα, στὴν περίπτωση ποὺ ξεκινήσομε ἀπὸ τὸν πίνακα A, τὰ στοιχεῖα τῆς δεύτερης διαγωνίου μποροῦμε νὰ τὰ ὑπολογίσομε ἀποκλειστικὰ μέσῳ τῶν ἀριθμῶν ν_i ($i = 1, 2, \ldots$) καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, μὲ τὴ σειρά τους, ἐξαρτῶνται, ἀποκλειστικά, ἀπὸ τὶς διαστάσεις $\dim(\mathcal{N}((A - \lambda \cdot I)^i))$. Ἐντελῶς ἀνάλογα, ξεκινώντας ἀπὸ τὸν πίνακα B, ὑπολογίζομε τοὺς ἀντίστοιχους ἀριθμοὺς ν_i', ποὺ ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικὰ ἀπὸ τὶς διαστάσεις $\dim(\mathcal{N}((B - \lambda \cdot I)^i))$. Ἀλλὰ οἱ πίνακες A, B εἶναι ὅμοιοι, ἀπ’ ὅπου προκύπτει (εὔκολα) ὅτι καὶ οἱ πίνακες $(A - \lambda \cdot I)^i$, $(B - \lambda \cdot I)^i$ εἶναι ὅμοιοι γιὰ κάθε i. Καθώς, ὅμως, ὅμοιοι πίνακες ἔχουν

[20] $\mathcal{R}$ συμβολίζει τὸν χῶρο γραμμῶν.

ἴσης διάστασης μηδενόχωρους (Πρόταση 6.9), ἕπεται ὅτι $v'_i = v_i$ γιὰ κάθε i, ἄρα τὰ στοιχεῖα τῆς δεύτερης διαγωνίου δὲν διαφέρουν ἂν θεωρήσομε τὸν A ἢ τὸν B.

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι οἱ A, B ἔχουν ἴδιους πίνακες Jordan. Ἀλλάζοντας, ἂν χρειαστεῖ, τὴ διάταξη τῆς εἰδικῆς βάσης ὡς πρὸς τὴν ὁποία ὑπολογίζονται ὁ πίνακας Jordan τοῦ B, μποροῦμε νὰ ὑποθέσομε ὅτι ὁ πίνακας Jordan τοῦ B εἶναι *ἴσος* μὲ τὸν πίνακα Jordan J τοῦ A. Ἀπὸ τὴ σχέση (19), ὑπάρχουν ἀντιστρέψιμοι πίνακες P, Q, τέτοιοι ὥστε $J = P^{-1}AP$ καὶ $J = Q^{-1}BQ$, ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι $B = QP^{-1}APQ^{-1} = R^{-1}AR$, ὅπου $R = PQ^{-1}$.

□

Ὁρισμός. Ἔστω V ἕνας ὁποιοσδήποτε διανυσματικὸς χῶρος. Δύο τελεστὲς $f, f' \in \mathcal{L}(V, V)$ λέμε ὅτι εἶναι ὅμοιοι ἂν ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος τελεστὴς $g \in \mathcal{L}(V, V)$, τέτοιος ὥστε $f' = gfg^{-1}$.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ σχέση ὁμοιότητας τελεστῶν τοῦ V εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στὸ σύνολο τῶν τελεστῶν τοῦ V.

Θεώρημα 6.11 *Ἔστω V ἕνας ὁποιοσδήποτε διανυσματικὸς χῶρος. Δύο τελεστὲς $f, f' \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι ὅμοιοι ἂν καὶ μόνο ἂν ὑπάρχουν βάσεις $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{B}'$ τοῦ V, τέτοιες ὥστε $A_{f/\mathcal{B}} = A_{f'/\mathcal{B}'}$.* [21]

Ἀπόδειξη Ἔστω ὅτι οἱ f, f' εἶναι ὅμοιοι, ὁπότε ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος τελεστὴς g, τέτοιος ὥστε $f' = gfg^{-1}$. Ἂς θεωρήσομε μία ὁποιαδήποτε βάση $\mathcal{B}$ τοῦ V. Τότε,

$$A_{f'/\mathcal{B}} = A_{gfg^{-1}/\mathcal{B}} = A_{g/\mathcal{B}} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot A^{-1}_{g/\mathcal{B}} = P \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P^{-1}, \tag{20}$$

ὅπου θέσαμε $A_{g/\mathcal{B}} = P$, μὲ τὸν $P = (p_{ij})$ ἀντιστρέψιμο. Ἂν $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ καὶ γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, n$ θέσομε $v'_j = p_{1j}v_1 + \cdots + p_{nj}v_n$, τότε τὸ σύνολο $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ εἶναι βάση τοῦ V (βλ.Θεώρημα 3.3). Λόγῳ τοῦ Θεωρήματος 3.2 ἰσχύει $A_{f'/\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot A_{f'/\mathcal{B}} \cdot P$. Αὐτὴ ἡ σχέση, λόγῳ τῆς (20) γίνεται

$$A_{f'/\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot (P \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P^{-1}) \cdot P = A_{f/\mathcal{B}}.$$

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι ὑπάρχουν βάσεις $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{B}'$ τοῦ V, τέτοιες ὥστε $A_{f/\mathcal{B}} = A_{f'/\mathcal{B}'}$ καὶ P εἶναι ὁ πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴ $\mathcal{B}'$ στὴ $\mathcal{B}$. Τότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 3.2 ἔχομε $A_{f'/\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot A_{f'/\mathcal{B}} \cdot P$, ἄρα $A_{f'/\mathcal{B}} = P \cdot A_{f'/\mathcal{B}'} \cdot P^{-1}$. Ἀλλὰ $A_{f/\mathcal{B}} = A_{f'/\mathcal{B}'}$, ἐξ ὑποθέσεως, ὁπότε

$$A_{f'/\mathcal{B}} = P \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot P^{-1} \tag{21}$$

Λόγῳ τοῦ Θεωρήματος 2.1, ἡ ἀπεικόνιση $\mathcal{L}(V, V) \ni g \overset{\phi}{\longmapsto} A_{g/\mathcal{B}} \in F^{n\times n}$ εἶναι ἰσομορφισμὸς ἀλγεβρῶν, ἄρα γιὰ τὸν συγκεκριμένο P ὑπάρχει $g \in \mathcal{L}(V, V)$, τέτοιος ὥστε

[21] Ὑπενθυμίζεται ὅτι συμβολίζομε μὲ $A_{f/\mathcal{B}}$ τὸν πίνακα τοῦ τελεστῆ f ὡς πρὸς τὴ βάση $\mathcal{B}$.

$A_{g/\mathcal{B}} = P$ καὶ ὁ g εἶναι ἀντιστρέψιμος, ἀφοῦ καὶ ὁ P εἶναι ἀντιστρέψιμος. Ἄρα, ἀπὸ τὴ σχέση (21),

$$A_{f'/\mathcal{B}} = A_{g/\mathcal{B}} \cdot A_{f/\mathcal{B}} \cdot A^{-1}_{g/\mathcal{B}} = A_{gfg^{-1}/\mathcal{B}}.$$

Ἀφοῦ οἱ πίνακες τῶν f' καὶ gfg^{-1}, ὡς πρὸς τὴν ἴδια βάση, εἶναι ἴσοι, ἕπεται ὅτι καὶ οἱ τελεστὲς αὐτοὶ εἶναι ἴσοι, ἄρα οἱ f, f' εἶναι ὅμοιοι.

□

Ἐπαναληπτικὲς ἀσκήσεις

Στὶς παρακάτω ἀσκήσεις, ὅλοι οἱ διανυσματικοὶ χῶροι εἶναι πεπερασμένης διαστάσεως.

Ἄσκηση 29 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V, V)$ μηδενοδύναμος δείκτη q καὶ $V' = f(V)$. Δεῖξτε ὅτι ὁ περιορισμὸς τοῦ f στὸν ὑπόχωρο V' εἶναι τελεστὴς τοῦ V', μηδενοδύναμος δείκτη $q-1$.*

Ἄσκηση 30 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V, V)$ μηδενοδύναμος δείκτη q καὶ $v \in V$, τέτοιο ὥστε $f^{q-1}(v) \neq 0$. Ἔστω, ἀκόμη, $U = \langle v, f(v), \ldots, f^{q-1}(v)\rangle$ καὶ $W = \langle w, f(w), \ldots, f^{q-2}(w)\rangle$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $W = U \cap f(V)$.*

Ἄσκηση 31 *Ἔστω $f \in \mathcal{L}(V, V)$ μηδενοδύναμος δείκτη q καὶ $v \in V$, τέτοιο ὥστε $f^{q-1}(v) \neq 0$. Ἂν $U = \langle v, f(v), \ldots, f^{q-1}(v)\rangle$, τότε ἀποδεῖξτε ὅτι*

$$\dim f^r(U) = \begin{cases} q-r & \text{ἂν } r < q \\ 0 & \text{ἂν } r \geq q \end{cases}$$

Ἄσκηση 32 *Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι $\mathbb{C}$-διανυσματικὸς χῶρος καὶ $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Ἂν ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση εἶναι πραγματικὸς καὶ συμμετρικός, δεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ f^2 εἶναι πραγματικὲς ≥ 0.*

Ὑπόδειξη. Ἔστω A ὁ πίνακας τοῦ f ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση. Ἐφαρμόστε τὸ Πόρισμα 5.5 γιὰ νὰ συμπεράνετε ὅτι οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A εἶναι πραγματικές. Ἐφαρμόστε τὸ Θεώρημα 4.9 γιὰ νὰ συμπεράνετε ὅτι ὁ A εἶναι ὅμοιος μὲ ἕναν διαγώνιο πίνακα D, τοῦ ὁποίου τὰ διαγώνια στοιχεῖα εἶναι οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ f (κάθε μία, τόσες φορὲς ὅση καὶ ἡ πολλαπλότητά της). Δεῖτε ὅτι: (α΄) Ὁ f^2 ἔχει πίνακα ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση τὸν A^2. (β΄) Ὁ A^2 εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν D^2. (γ΄) Ὅμοιοι πίνακες ἔχουν τὰ ἴδια χαρακτηριστικὰ πολυώνυμα (Πρόταση 4.2). Συνδυᾶστε τὰ (α΄), (β΄), (γ΄) .

Ἄσκηση 33 *Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι $\mathbb{C}$-διανυσματικὸς χῶρος μὲ ἐσωτερικὸ γινόμενο καὶ $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ f^*f εἶναι πραγματικὲς ≥ 0 (ὡς συνήθως, f^* εἶναι ὁ συζυγὴς τελεστὴς τοῦ f). Ἐπιπλέον, οἱ ἰδιοτιμὲς εἶναι ὅλες > 0, ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ f εἶναι ἀντιστρέψιμος.*

Ὑπόδειξη. Ἔστω λ ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*f καὶ μὴ μηδενικὸ ἰδιοδιάνυσμα v, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ λ. Δεῖτε τὴ σχέση (ἐξηγῆστε γιατὶ ἰσχύει τὸ κάθε =) $\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, f^*f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\|v\|^2$, καὶ συμπεράνατε ὅτι $\lambda \in \mathbb{R}$ καὶ $\lambda \geq 0$. Μένει νὰ δείξετε ὅτι τὸ 0 δὲν εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*f ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ f εἶναι ἀντιστρέψιμος. Ἰσοδύναμα, τὸ 0 εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*f ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ f εἶναι μὴ ἀντιστρέψιμος. Παρατηρῆστε ὅτι, ἂν ὁ f εἶναι μὴ ἀντιστρέψιμος, τότε ὁ $\mathrm{Ker}(f)$ περιέχει μὴ μηδενικὰ διανύσματα, ὁπότε συμπεράνατε ὅτι τὸ 0 εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f, ἄρα καὶ τοῦ f^*f. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ 0 εἶναι ἰδιοτιμὴ τοῦ f^*f, θεωρῆστε μὴ μηδενικὸ ἰδιοδιάνυσμα v, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ 0. Τότε $f^*f(v) = 0$ καὶ χρησιμοποιεῖστε αὐτὴ τὴ σχέση γιὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι ὁ f εἶναι μὴ ἀντιστρέψιμος, ὡς ἑξῆς: Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξετε ὅτι $\|f(v)\|^2 = 0$. Γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς τελευταίας, θέσετε $f(v) = u$ καὶ $g = f^*$. Τότε, $\|f(v)\|^2 = \langle u, g^*(v)\rangle = \ldots = \langle f^*f(v) = v\rangle = 0$.

Ἄσκηση 34 *Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι $\mathbb{C}$-διανυσματικὸς χῶρος καὶ ὁ $f \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι αὐτοσυζυγής (δηλαδή, $f^* = f$). Δεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ f εἶναι πραγματικές.*

Ὑπόδειξη. Ἔστω λ ἰδιοτιμὴ τοῦ f καὶ v μὴ μηδενικὸ ἰδιοδιάνυσμα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν λ. Δεῖτε τί λέει τὸ Πόρισμα 5.4. Βασιστεῖτε στὴ σχέση $\langle f(v), v\rangle = \langle v, f^*(v)\rangle$ (γιατὶ ἰσχύει;) καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι $\lambda\|v\|^2 = \overline{\lambda}\|v\|^2$.

Ἄσκηση 35 *Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι $\mathbb{C}$-διανυσματικὸς χῶρος καὶ ὁ $f \in \mathcal{L}(V, V)$ εἶναι μοναδιαῖος (δηλαδή, $f^*f = ff^* = \mathrm{id}$). Δεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ f ἔχουν μέτρο* 1.

Ὑπόδειξη. Ἔστω λ ἰδιοτιμὴ τοῦ f καὶ v μὴ μηδενικὸ ἰδιοδιάνυσμα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν λ. Βασιστεῖτε στὴ σχέση $\langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, f^*f(v)\rangle$ (γιατὶ ἰσχύει;) καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι $\lambda\overline{\lambda}\|v\|^2 = \|v\|^2$.

Ἄσκηση 36 *Ἔστω ὅτι ὁ V εἶναι χῶρος μὲ ἐσωτερικὸ γινόμενο, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ εἶναι ὀρθοκανονικὲς βάσεις του καὶ P ὁ πίνακας μετάβασης ἀπὸ τὴ $\mathcal{B}'$ στὴ $\mathcal{B}$. Ἂν ὁρίσομε $P^* = (\overline{P})^{\mathrm{T}}$, ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ P^* εἶναι ἀντίστροφος τοῦ P.*

Ὑπόδειξη. Ἀρκεῖ νὰ δείξετε ὅτι $P^*P = I_n$. Ὑπολογῖστε τὸ (i, j)-στοιχεῖο τοῦ P^*P:

$$\left((\overline{P})^{\mathrm{T}} \cdot P\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}((\overline{P})^{\mathrm{T}})_{ik}(P)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\overline{P})_{ki}(P)_{kj}. \qquad (*)$$

Ἀρκεῖ νὰ δείξετε ὅτι τὸ τελευταῖο ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ δ_{ij}, ὅπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ἂν } i = j \\ 0 & \text{ἂν } i \neq j \end{cases}$$

Αὐτὸ θὰ τὸ δείξετε ὡς ἑξῆς: Ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ πίνακα μετάβασης, ἰσχύει $b'_i = (P)_{1i}b_1 + \cdots + (P)_{ni}b_n$ καὶ $b'_j = (P)_{1j}b_1 + \cdots + (P)_{nj}b_n$. Ἀπὸ τὴν ὀρθογωνιότητα τῆς $\mathcal{B}'$ ἕπεται ὅτι $\langle b'_i, b'_j\rangle = \delta_{ij}$. Ἄρα, $\langle (P)_{1j}b_1 + \cdots + (P)_{nj}b_n, (P)_{1i}b_1 + \cdots + (P)_{ni}b_n\rangle = \delta_{ij}$. Ἐκμεταλλευόμενοι τὴν ἄσκηση 18 καὶ τὴν ὀρθογωνιότητα τῆς $\mathcal{B}$, δεῖξτε ὅτι τὸ δεξιὸ μέλος τῆς τελευταίας σχέσης δὲν εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὸ δεξιὸ μέλος τῆς $(*)$.

Ἄσκηση 37 *Ἔστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τέτοιος ὥστε $A^* = A$, ὅπου, ἐξ ὁρισμοῦ, $A^* = (\overline{A})^{\mathrm{T}}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A εἶναι πραγματικές.*

Ὑπόδειξη. Ἔστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ἐκεῖνος ὁ τελεστὴς, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση εἶναι ὁ A. Ἐφαρμόστε τὴν ἄσκηση 34.

Ἄσκηση 38 *Ἔστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τέτοιος ὥστε $A^*A = I_n$, ὅπου, ἐξ ὁρισμοῦ, $A^* = (\overline{A})^{\mathrm{T}}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ A εἶναι ἔχουν μέτρο* 1.

Ὑπόδειξη. Ἔστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ἐκεῖνος ὁ τελεστὴς, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρὸς τὴ στάνταρ βάση εἶναι ὁ A. Ἐφαρμόστε τὴν ἄσκηση 35.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Α. Μελάς, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα* (δίτομο), Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2008.

[2] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Α. Μελάς, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα* (σὲ ἕνα τόμο), Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.

[3] K. Hoffman & R. Kunze, *Linear Algebra*, βλ. σχετικὸ διαδικτυακό σύνδεσμο στὴν ἰστοσελίδα τοῦ μαθήματος.

[4] Χ. Κουρουνιώτης, *Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ - Σημειώσεις*. (2014) `http://www.math.uoc.gr/~chrisk/LinAlgII-Notes.pdf`

[5] Ν. Τζανάκης, *Γραμμικὴ Ἄλγεβρα Ι - Σημειώσεις* (ὄχι πλήρεις). (2014) `http://server.math.uoc.gr/~tzanakis/Courses/LinAlg-II/Notes_Nikos.pdf`