Διακριτα Μαθηματικα

Ἐξετάσεις Σεπτεμβρίου 2001

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

8 Σεπτεμβρίου 2001

1. Πόσους πενταψήφιους ἀριθμοὺς μὲ διαφορετικὰ ὅλα τὰ ψηφία τους μποροῦμε νὰ σχηματίσομε μὲ τὰ ψηφία **1,3,4,5,6,7,8** ; Πόσοι ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι περιττοί ; μον. 1.5

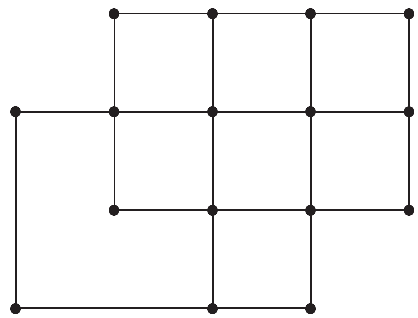
2. Πόσες ἀπὸ τὶς (ἔστω καὶ χωρὶς νόημα) λέξεις, ποὺ σχηματίζονται μὲ τὰ γράμματα τῆς λέξης ΕΙΝΑΙ, ἔχουν τὰ δύο Ι διαχωρισμένα; μον. 1.5

3. Σὲ μιὰ ἐκδήλωση μὲ δεῖπνο μπορεῖ νὰ ἐπιλέξει κανεὶς ἕνα (τὸ πολύ) κύριο πιάτο, μία (τὸ πολύ) σαλάτα, ἕνα (τὸ πολύ) φροῦτο καὶ ἕνα (τὸ πολύ) γλυκό. Οἱ δυνατότητες ἐπιλογῆς εἶναι 4 γιὰ τὸ κύριο πιάτο, 3 γιὰ τὴ σαλάτα, 3 γιὰ τὸ φροῦτο καὶ 2 γιὰ τὸ γλυκό. Ποιὸς εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ἀνθρώπων ποὺ πρέπει νὰ συμμετέχουν γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ ποῦμε μὲ βεβαιότητα ὅτι δύο, τουλάχιστον, ἔχουν ἐπιλέξει ἀκριβῶς τὸ ἴδιο menu; Ὑποτίθεται ὅτι ὅλοι «τιμοῦν» τὸν μπουφέ, ἔστω καὶ μὲ κάτι ἐλάχιστο! μον. 1.5

4. Ἔστω ὅτι T_1, T_2 εἶναι δύο ξένα μεταξύ τους δένδρα, a_1, b_1 εἶναι κορυφὲς τοῦ T_1 καὶ a_2, b_2 κορυφὲς τοῦ T_2. Δημιουργοῦμε τώρα ἕνα νέο γράφημα G ἑνώνοντας μὲ μία ἀκμὴ τὶς a_1 καὶ a_2 καὶ μὲ μία ἄλλη ἀκμὴ τὶς b_1, b_2. Εἶναι τὸ G συννεκτικό; Εἶναι τὸ G δένδρο; Ἀποδεῖξτε τοὺς ἰσχυρισμούς σας. μον. 1

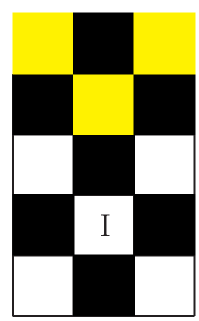
5. Ἕνα δένδρο ἔχει $2n$ κορυφὲς βαθμοῦ 1, $3n$ κορυφὲς βαθμοῦ 2 καὶ n κορυφὲς βαθμοῦ 3. Προσδιορῖστε τὴν τιμὴ τοῦ n, ὁπότε καὶ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ δένδρου αὐτοῦ. μον. 1

6. Τὸ διπλανὸ γράφημα δείχνει τὸν χῶρο εὐθύνης μιᾶς ἀστυνομικῆς περιπόλου. Οἱ ἀκμὲς ἀντιστοιχοῦν σὲ ἰσομήκεις δρόμους, ἐνῶ τὰ ἐσωτερικὰ τῶν τετραγώνων σὲ οἰκοδομικὰ τετράγωνα. Γιὰ ποιὸ λόγο ἡ περίπολος εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ διασχίσει ἕναν ἢ περισσότερους δρόμους περισσότερες ἀπὸ μία φορές; Βρεῖτε μία ἐλάχιστη διαδρομὴ (ὄχι κατ' ἀνάγκη κλειστή), ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ ὅλους τοὺς δρόμους. μον. 1.5



7. Θυμηθεῖτε ὅτι ἕνα γράφημα λέγεται διμερὲς ἂν τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν του εἶναι δυνατὸν νὰ διαμεριστεῖ σὲ δύο ξένα ὑποσύνολα σύνολα V_1 καὶ V_2 ἔτσι ὥστε, ὅλες οἱ γειτονικὲς κορυφὲς κάθε κορυφῆς τοῦ V_1 νὰ ἀνήκουν, ἀποκλειστικά, στὸ V_2 καὶ ὅλες οἱ γειτονικὲς κορυφὲς κάθε κορυφῆς τοῦ V_2 νὰ ἀνήκουν, ἀποκλειστικά, στὸ V_1. Δεῖξτε πρῶτα ὅτι, ἂν ἕνα γράφημα μὲ *ἄρτιο* πλῆθος κορυφῶν εἶναι διμερές καὶ Χαμιλτονιανό, καὶ V_1, V_2 εἶναι σύνολα ὅπως παραπάνω, τότε αὐτὰ εἶναι ἰσοπληθῆ.

   Στὴ συνέχεια, θεωρῆστε τὸ διπλανὸ σχῆμα, ὅπου παριστάνεται ἕνα τμῆμα μιᾶς σκακιέρας – *τὰ γκρὶ τετράγωνα δὲν περιλαμβάνονται στὸ τμῆμα αὐτό.* Στὸ τετράγωνο I βρίσκεται ἕνας ἵππος. Δεῖξτε (ὄχι πειραματικὴ ἀπόδειξη!) ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ κινηθεῖ ὁ ἵππος σ' αὐτὸ τὸ τμῆμα τῆς σκακιέρας περνώντας ἀπὸ κάθε τετράγωνο *μία ἀκριβῶς* φορά. μον. 2



8. Ἔστω ὅτι a_n συμβολίζει τὸ συνολικὸ κεφάλαιο σὲ € μιᾶς ἑταιρείας στὸ τέλος τοῦ n-οστοῦ ἔτους. Ἐμπειρικὰ ὑπολογίζεται ὅτι ἡ αὔξηση τοῦ κεφαλαίου κατὰ τὸ n-οστὸ ἔτος ἰσοῦται μὲ τὸ 3πλάσιο τῆς αὔξησης τοῦ προηγούμενου χρόνου σὺν 100000€. Ἂν $a_0 = 100000$€ (ἡ φυσικὴ σημασία τοῦ a_0 εἶναι, προφανῶς, τὸ κεφάλαιο ποὺ διαθέτει ἡ ἑταιρεία ἀμέσως πρὶν ἀπὸ τὴν ἔναρξη λειτουργίας της) καὶ $a_1 = 200000$€, ὑπολογῖστε τύπο ποὺ δίνει τὸ a_n συναρτήσει τοῦ n.

   μον. 2

Σημείωση ἐπὶ τῆς βαθμολογίας: Σύνολο μονάδων: 12. Ἄριστα: 10 - Βάση: 5

Καλὴ ἐπιτυχία!