# Διακριτα Μαθηματικα

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

## Φυλλάδιο 8
## Ἀναδρομικὲς Ἀκολουθίες

1. Βρεῖτε τοὺς τύπους τῶν παρακάτω ἀκολουθιῶν (τὶς συναντήσαμε στοὺς ἀλγορίθμους ταξινόμησης), οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀναδρομικὰ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + n - 1\,, \quad s_1 = 0 \\ p_n &= 3p_{n-1}\,, \quad p_0 = 1 \\ t_n &= 2t_{n-1} + 3^{n-1}\,, \quad t_0 = 0 \\ b_n &= 2b_{n-1} + 2^n - 1\,, \quad b_0 = 1 \\ u_n &= 2u_{n-1} + (n-1)2^{n-1} + 1\,, \quad u_0 = 0\,. \end{aligned}$$

2. Ὑπολογῖστε τὶς ἀναδρομικὲς ἀκολουθίες, οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} &= 0\,, \quad a_0 = 0,\, a_1 = 3 \\ a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} &= 0\,, \quad a_0 = 1,\, a_1 = 6 \\ a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} &= 3^n\,, \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1 \\ a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} &= 3\,, \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} &= 0\,, \quad a_0 = 0,\, a_1 = 2 \\ a_n - a_{n-1} - a_{n-2} &= 0\,, \quad a_0 = 1,\, a_1 = 1 \\ a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} &= 0\,, \quad a_0 = 2,\, a_1 = 1,\, a_2 = 1\,. \end{aligned}$$

3. Ὑπολογῖστε τὶς ἀκολουθίες, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀναδρομικὴ σχέση

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}\,,\ n \geq 2$$

σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις συνοριακῶν συνθηκῶν:
(α′) $a_1 = 1, a_2 = 0$ (β′) $a_0 = 0, a_3 = 0$ (γ′) $a_0 = 1, a_3 = 2$ .
(Ὑπόδειξη: Τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο ἔχει ρίζες συζυγεῖς μιγαδικές, ἔστω $\rho, \overline{\rho}$. Παρατηρῆστε ὅτι $\rho^3 = -1$, $\rho^2 = -\overline{\rho}$ καὶ ἀνάλογα γιὰ τὸ $\overline{\rho}$.)

Στὴν περίπτωση (α′): Ὑπολογῖστε τοὺς δέκα πρώτους ὅρους τὶς ἀκολουθίας. Παρατηρεῖστε ὅτι παρουσιάζουν περιοδικότητα, μὲ περίοδο 6. Ἀποδεῖξτε τὴν παρατήρησή σας. Δεῖξτε ὅτι ὁ τύπος τῆς γεννήτριας συνάρτησης εἶναι $A(z) = 1/(1 - z + z^2)$.

4. Ἔστω ἀκέραιος $k \geq 1$. Ἂν $1/(1-z)^k = \sum_0^\infty a_n z^n$ καὶ $1/(1-z)^{k+1} = \sum_0^\infty b_n z^n$, δεῖξτε ὅτι $b_n = (n+1)a_{n+1}/k,\ n = 0, 1, 2, \ldots$.
(Ὑπόδειξη: Παραγωγῖστε τὴν πρώτη σειρά).

5. Ὑπολογῖστε τὸν τύπο τῆς ἀκολουθίας $a_n$, ἀπὸ τὴ γεννήτρια συνάρτησή της $A(z)$, σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις: (α′) $A(z) = 1/(z^2 - 5z + 6)$ (β′) $A(z) = z/(z^2 - 5z + 6)$ (γ′) $A(z) = 1/(z-2)^2$ (δ′) $A(z) = z/(z-2)^2$ (ε′) $A(z) = 1/(z-2)^3$.
(Ὑπόδειξη: Μπορεῖ νὰ χρειασθεῖτε τὴν ἄσκηση 4 σὲ κάποιες περιπτώσεις.)
Ἀπαντήσεις. (α′) $a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}$ (β′) $a_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$ (γ′) $a_n = \frac{n+1}{2^{n+2}}$ (δ′) $a_n = \frac{n}{2^{n+1}}$
(ε′) $a_n = \frac{-(n+1)(n+2)}{2^{n+4}}$

6. Ὑπολογῖστε μία εἰδικὴ λύση τῆς ἀναδρομικῆς σχέσης $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = f(n)$ σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς περιπτώσεις: (α′) $f(n) = 5^n$ (β′) $f(n) = 2^n$ (γ′) $f(n) = (6 + 12n)5^n$ (δ′) $f(n) = (1 + n)2^n$ . Ἀνάλογο ζήτημα, ἂν ἡ ἀναδρομικὴ σχέση εἶναι $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = f(n)$, μὲ τὶς ἴδιες συναρτήσεις $f(n)$ ὅπως παραπάνω. Σὲ κάθε περίπτωση, βεβαιωθεῖτε, πολὺ ἁπλά, γιὰ τὴν ὀρθότητα τῆς λύσεώς σας, ἀντικαθιστώντας στὴν ἀναδρομικὴ σχέση.

7. Ὑπολογῖστε τὶς ἀναδρομικὲς ἀκολουθίες $a_n,\ b_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τὶς σχέσεις

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + n\ ,\ b_n = b_{n-1} + a_{n-1}\ ,\ \ a_0 = b_0 = \frac{1}{2}\ .$$

8. Ὑπολογῖστε τὴν ἀναδρομικὴ ἀκολουθία, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$a_n^2 - 2a_{n-1}^2 = 1\ ,\ a_0 = 2\ .$$

Ὑπόδειξη: Θεωρῆστε τὴν ἀκολουθία $b_n = a_n^2$.

9. Ὑπολογῖστε τὴν ἀναδρομικὴ ἀκολουθία, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$a_n^2 - 2a_{n-1} = 0\ ,\ a_0 = 4\ .$$

Ὑπόδειξη: Θεωρῆστε τὴν ἀκολουθία $b_n = \log_2 a_n$. Ὑπενθυμίζω ὅτι $\log_2$ εἶναι ὁ *λογάριθμος μὲ βάση 2*, ὁπότε $\log_2 a = x \iff 2^x = a$.