Διακριτα Μαθηματικα

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο 7
Συνεκτικότητα – Δένδρα

Μετὰ πολλῶν βοηθητικῶν ὑποδείξεων !

1. Ἔστω ἕνα γράφημα G καὶ μία κορυφή του v, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Γιὰ κάθε ἄλλη κορυφὴ x, ὑπάρχει μονοπάτι ποὺ συνδέει τὴ v μὲ τὴ x. Δεῖξτε ὅτι τὸ G εἶναι συνεκτικὸ γράφημα.

2. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἕνα γράφημα, τοῦ ὁποίου ὅλες οἱ κορυφὲς ἔχουν βαθμὸ ≥ 2, περιέχει ἁπλὸ κύκλωμα, ἄρα, ἕνα τέτοιο γράφημα ἀποκλείεται νὰ εἶναι δένδρο.

3. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἕνα συνεκτικὸ γράφημα n κορυφῶν ἔχει τοὐλάχιστον $n-1$ ἀκμές. Ἰσοδύναμη διατύπωση: Ἕνα συνεκτικὸ γράφημα m ἀκμῶν περιέχει, τὸ πολύ, $m+1$ κορυφές.
   Υπόδειξη. Ἀποδεῖξτε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ δεύτερη διατύπωσή του. Χρησιμοποιεῖστε ἐπαγωγὴ ἐπὶ τοῦ m. Ἂν ἰσχύει γιὰ $m \leq k$ καὶ θεωρήσετε ἕνα συνεκτικὸ γράφημα G μὲ $k+1$ ἀκμές, τότε, ἀφαιρέσετε μία ἀκμή. Γιὰ τὸ γράφημα G', ποὺ θὰ προκύψει, διακρίνετε δύο περιπτώσεις: Ἢ θὰ εἶναι συνεκτικό, ὁπότε θὰ ἐφαρμόσετε σ' αὐτὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση, ἢ δὲν θὰ εἶναι, ὁπότε θὰ ἐφαρμόσετε τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες του.

4. Ἔστω G συνεκτικὸ γράφημα καὶ e μία ἀκμή του. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ e εἶναι ἰσθμὸς ἄν, καὶ μόνο ἄν, δὲν περιέχεται σὲ κανένα κύκλωμα τοῦ G.
   (Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ e εἶναι ἰσθμός. Ἂν ὑπῆρχε κύκλωμα, ποὺ νὰ περιέχει τὴν e, τότε, ἡ ἀφαίρεση τῆς e θὰ χαλοῦσε τὴ συνεκτικότητα ; Ἀντιστρόφως· ἂν ἡ e δὲν περιέχεται σὲ κανένα κύκλωμα τῆς G καὶ ἡ ἀφαίρεση τῆς e δὲν χαλοῦσε τὴ συνεκτικότητα, θὰ βρίσκαμε μονοπάτι μὲ ἄκρα τὶς κορυφὲς ἐκεῖνες ποὺ συνέδεε ἡ e πρὶν ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσή της, τὸ ὁποῖο δὲν περιέχει τὴν e. Ξαναβάζομε στὴ θέση της τὴν e. Τί δημιουργεῖται τότε γιὰ τὸ G ;)

5. Ἔστω G συνεκτικὸ γράφημα καὶ e μία ἀκμή του, ἡ ὁποία εἶναι ἰσθμὸς, ποὺ συνδέει τὶς κορυφὲς v_1 καὶ v_2 τοῦ G. Διαμερῖστε τὶς κορυφὲς τοῦ G στὰ ἑξῆς δύο (ξένα μεταξύ τους) σύνολα V_1, V_2: Τὸ V_1 περιέχει τὴν κορυφὴ v_1 καὶ ὅλες ἐκεῖνες τὶς κορυφὲς v τοῦ G, γιὰ τὶς ὁποῖες ὑπάρχει μονοπάτι τοῦ G, ποὺ δὲν περιέχει τὴν e καὶ συνδέει τὴ v μὲ τὴ v_1. Τὸ V_2 περιέχει ὅλες τὶς ὑπόλοιπες κορυφὲς τοῦ G. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:

   (α′) $v_2 \in V_2$ (Ὑπόδειξη. Χρησιμοποεῖστε τὴν ἄσκηση 4.)

(β′) Ἂν θεωρήσομε δύο μονοπάτια, τὰ ὁποῖα συνδέουν μία κορυφὴ μὲ τὶς v_1 καὶ v_2, ἀντιστοίχως, τότε, τὸ ἕνα, τοὐλάχιστον, ἀπὸ τὰ δύο μονοπάτια περιέχει, ἀναγκαστικά, τὴν ἀκμὴ e. (Ὑπόδειξη. Ἂν ὄχι, τὸ γράφημα θὰ περιεῖχε κύκλωμα, τοῦ ὁποίου μία ἀκμὴ θὰ ἦταν ἡ e. Μετά, χρησιμοποιεῖστε τὴν ἄσκηση 4.)

(γ′) Μία κορυφὴ ἀνήκει στὸ V_2 ἄν, καὶ μόνο ἄν, ὑπάρχει μονοπάτι, ποὺ τὴ συνδέει μὲ τὴν κορυφὴ v_2, τὸ ὁποῖο δὲν περιέχει τὴν ἀκμὴ e. (Ὑπόδειξη. Ἔστω $v \in V_2$. Τί σημαίνει αὐτό, ἐξ ὁρισμοῦ ; Συνδυάστε το μὲ τὸ ὅτι, πρὶν ἀφαιρεθεῖ ἡ ἀκμὴ e, ὑπάρχει μονοπάτι, ποὺ συνδέει τὴ v μὲ τὴ v_1, γιὰ νὰ συμπεράνετε ὅτι αὐτὸ τὸ μονοπάτι περιέχει τὴν e. Ἀμέσως τότε δεῖτε ὅτι ὑπάρχει μονοπάτι, ποὺ συνδέει τὴν v μὲ τὴν v_2. Γιὰ τὸ ἀντίστροφο, χρησιμοποιεῖστε τὸ (5β′).)

(δ′) Δεῖξτε ὅτι μὲ τὴν ἀφαίρεση τῆς ἀκμῆς e ἀπὸ τὸ γράφημα G προκύπτει ἕνα μὴ συννεκτικὸ γράφημα, τὸ ὁποῖο ἔχει δύο, ἀκριβῶς, συννεκτικὲς συνιστῶσες G_1, G_2, μὲ ἀντίστοιχα σύνολα κορυφῶν V_1, V_2. (Ὑπόδειξη. Γιὰ τὴ συννεκτικότητα τῶν G_i, χρησιμοποιεῖστε τὴν ἄσκηση 1.)

6. Ἂν σὲ ἕνα γράφημα δύο διαφορετικὲς ἁλυσσίδες ἔχουν κοινὰ ἄκρα, τότε τὸ γράφημα περιέχει κύκλο. (Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι οἱ ἁλυσσίδες εἶναι $x = a_1 - a_2 - \cdots - a_n = y$ καὶ $x = b_1 - b_2 - \cdots - b_m = y$ καὶ k ὁ πρῶτος δείκτης > 1 γιὰ τὸν ὁποῖο ἡ κορυφὴ a_k ταυτίζεται μὲ κάποια κορυφὴ b_l. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ μονοπάτι $a_1 - a_2 - \cdots - a_k = b_l - b_{l-1} - \cdots - b_2 - b_1 = a_1$ εἶναι κύκλος.)

7. Ἂν σὲ ἕνα γράφημα δύο κύκλοι περιέχουν κοινὴ ἀκμή, τότε ὑπάρχει κύκλος, ποὺ δὲν περιέχει αὐτὴ τὴν ἀκμή. (Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι οἱ δύο κύκλοι εἶναι $a_1 - a_2 - \cdots - a_n - a_1$ καὶ $b_1 - b_2 - \cdots - b_m - b_1$, ὅπου $a_1 = b_1$ καὶ $a_2 = b_2$. Ἔστω $k \geq 2$ ὁ μέγιστος δείκτης γιὰ τὸν ὁποῖο ἡ κορυφὴ a_k συμπίπτει μὲ κάποια κορυφὴ b_l. Παρατηρῆστε τὸ μονοπάτι $a_1 - a_n - a_{n-1} - \cdots - a_k = b_l - b_{l+1} - \cdots - b_m - b_1 = a_1$.)

8. Μὲ τὰ ψηφία 0 καὶ 1 κατασκευάστε ἕνα κώδικα γιὰ τὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου, ὁ ὁποῖος θὰ χρησιμοποιεῖ 3 ψηφία γιὰ τὰ γράμματα Α,Ε· 4 ψηφία γιὰ τὰ γράμματα Η,Ι,Κ,Μ,Ο,Π,Σ,Τ· 5 ψηφία γιὰ τὰ Β,Δ,Λ,Ν,Ρ,Χ· 6 ψηφία γιὰ τὰ Θ,Γ· 7 ψηφία γιὰ τὰ Ζ,Ξ καὶ 8 ψηφία γιὰ τὰ Υ,Φ,Ψ,Ω. Γράψτε τὶς λέξεις ΩΡΑ, ΘΡΟΝΟΣ, ΞΥΡΑΦΙ σ' αὐτὸν τὸν κώδικα καὶ μετὰ ἀποκρυπτογραφῆστε τις.

9. Ἕνα ἐπιτραπέζιο παιγνίδι παίζεται μὲ 3,4,5 ἢ 6 παῖκτες. Κάθε παρτίδα τοῦ παιγνιδιοῦ ἀναδεικνύει ἕνα νικητή. Σὲ μία νεανικὴ κατασκήνωση 115 παιδιὰ ἀποφασίζουν νὰ ὀργανώσουν ἕνα τουρνουὰ αὐτοῦ τοῦ παιγνιδιοῦ, γιὰ τὴν ἀνάδειξη πρωταθλητῆ, ἔτσι ὥστε σὲ κάθε παρτίδα νὰ παίρνει μέρος ὁ ἴδιος ἀριθμὸς παιδιῶν $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ καὶ ὁ συνολικὸς ἀριθμὸς παρτίδων ποὺ θὰ παιχθοῦν νὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος δυνατός. Ποιὸς πρέπει νὰ εἶναι ὁ n καὶ πόσες παρτίδες θὰ παιχθοῦν ;