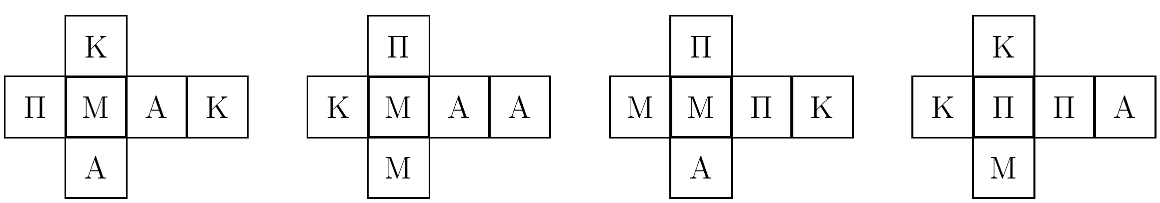
Διακριτα Μαθηματικα

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο 6
Γραφήματα: Γενικὰ καὶ ὀλίγον διασκεδαστικά

1. Ἕνα ζεῦγος καλεῖ σὲ δεξίωση $n-1$ ἄλλα ζεύγη σὲ πάρτυ. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸν οἰκοδεσπότη, κάθε καλεσμένος, συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς οἰκοδέσποινας, ρίχνει σὲ ἕνα κουτὶ ἕνα ἀνώνυμο χαρτί, στὸ ὁποῖο γράφει τὸν ἀριθμὸ τῶν καλεσμένων, τοὺς ὁποίους χαιρέτησε. Ἐννοεῖται ὅτι κανεὶς δὲν λογαριάζει σ' αὐτούς, ποὺ χαιρέτησε, τὸν ἑαυτὸ του, οὔτε τὸν/τὴν συζυγό του. Ἐπίσης, δὲν θεωρεῖται δεδομένο ὅτι κάθε προσκεκλημένος χαιρέτησε τὸν οἰκοδεσπότη ἢ τὴν οἰκοδέσποινα (Πρόκειτα γιὰ πάρτυ ἐκκεντρικῶν, καθὼς βλέπετε !). Ὅταν τελειώνει τὸ πάρτυ, ὁ οἰκοδεσπότης ἀνοίγει τὸ κουτί, παίρνει τὰ $2n-1$ χαρτάκια, ποὺ εἶναι μέσα καὶ διαπιστώνει ὅτι κάθε χαρτὶ γράφει διαφορετικὸ ἀριθμό. Πόσους χαιρέτησε ὁ οἰκοδεσπότης ;
   Ὑπόδειξη: Παρατηρῆστε ὅτι κάθε ἀριθμός, ἀπὸ 0 μέχρι $2n-1$, βρέθηκε γραμμένος σὲ κάποιο χαρτί. Μετά, λῦστε τὸ πρόβλημα γιὰ ἕνα μικρὸ n, π.χ. γιὰ $n=4$, καὶ κατασκευάστε ἕνα γράφημα $2n$ κορυφῶν (οἱ συμμετέχοντες στὸ πάρτυ), στὸ ὁποῖο δύο κορυφὲς εἶναι γειτονικές, ἂν οἱ ἀντίστοιχοι ἄνθρωποι ἀντάλλαξαν χαιρετισμό. Ἂν κάποιος χαιρέτησε k ἀνθρώπους, πόσους χαιρέτησε ἡ σύζυγός του ;

2. Νὰ τοποθετηθοῦν οἱ παρακάτω τέσσερεις κύβοι, ὁ ἕνας πάνω στὸν ἄλλο, ἔτσι ὥστε, κάθε μία ἀπὸ τὶς τέσσερεις παράπλευρες 1×4 ἕδρες τοῦ προκύπτοντος «πύργου» νὰ περιέχει καὶ τὰ τέσσερα διαφορετικὰ χρώματα, ἄσπρο $(=A)$, μπλέ $(=M)$, κίτρινο $(=K)$, πράσινο $(=\Pi)$.



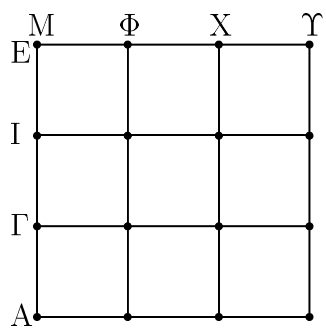
3. Ὑπάρχουν 16 ἐπιτροπές, ἀποτελούμενες ἀπὸ μέλη, ποὺ μιλοῦν μία ἢ περισσότερες ἀπὸ τὶς γλῶσσες **ἑλληνικά** (=Ε), **ἀγγλικά** (=Α), **γαλλικά** (=Γ), **ἰταλικά**

(=Ι) καὶ γνωρίζουν μία ἢ περισσότερες ἀπὸ τὶς εἰδικότητες **Μαθηματικά** (=Μ), **Ὑπολογιστές** (=Υ), **Φυσική**(=Φ) καὶ **Χημεία** (=Χ). Τὸ παρακάτω γράφημα, τοῦ ὁποίου οἱ κορυφὲς ἀντισστοιχοῦν στὶς ἐπιτροπές, ἔχει κατασκευασθεῖ ἔτσι, ὥστε γειτονικὲς κορυφὲς νὰ ἀντιστοιχοῦν σὲ ἐπιτροπὲς ποὺ *δὲν* ἔχουν κοινὰ μέλη (ἄρα, μποροῦν νὰ συνεδριάζουν συγχρόνως): Τὰ γράμματα στὸ γράφημα μᾶς πληροφοροῦν ὅτι, γιὰ παράδειγμα, ἡ κορυφὴ στὴ γραμμὴ Ι καὶ τὴ στήλη Χ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἐπιτροπὴ τῆς ὁποίας τὰ μέλη μιλοῦν (τοὐλάχιστον) ἰταλικὰ καὶ γνωρίζουν (τοὐλάχιστον) Χημεία. Δύο συνεδριάσεις μποροῦν νὰ γίνουν κάθε μέρα καὶ αὐτὲς τὴν ἴδια ὥρα, συγχρόνως. Δεῖξτε ὅτι σὲ 8 ἡμέρες γίνονται καὶ οἱ 16 συνεδριάσεις. Στὴ συνέχεια, ὑποθέστε ὅτι ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς δύο κατηγορίες περιορισμῶν:

(α′) Μία τοὐλάχιστον, μέρα νὰ συνεδριάσουν δύο ἐπιτροπὲς μὲ γνῶστες Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῆς, ἀντιστοίχως. Ἀνάλογοι περιορισμοὶ γιὰ τὰ ζεύγη εἰδικοτήτων Φυσικὴ-Χημεία, Χημεία-Ὑπολογιστές.

(β′) Μία τοὐλάχιστον, μέρα νὰ συνεδριάσουν δύο ἐπιτροπὲς μὲ γνῶστες ἑλληνικῶν καὶ ἰταλικῶν, ἀντιστοίχως. Ἀνάλογοι περιορισμοὶ γιὰ τὰ ζεύγη γλωσσῶν ἰταλικὰ-γαλλικὰ καὶ γαλλικὰ-ἀγγλικά.

Ἀποδεῖξτε ὅτι, ὑπ' αὐτοὺς τοὺς περιορισμούς, δὲν ἀρκοῦν 8 μέρες γιὰ νὰ συνεδριάσουν καὶ οἱ 16 ἐπιτροπές.



Ὑπόδειξη: Ἐπαναδιατυπῶστε τὸ πρόβλημα σὲ πρόβλημα κάλυψης μιᾶς σκακιέρας 4×4 ἀπὸ 8 ντόμινο διαστάσεως 2×1. Πῶς διατυπώνονται οἱ περιορισμοὶ (α′) καὶ (β′) τοῦ προβλήματος μὲ ὅρους σκακιέρας-ντόμινο ;