Διακριτα Μαθηματικα

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο 5 – Γραφήματα

1. Θεωρῆστε τὸ γράφημα στὸ Πρόβλημα 1 τοῦ Φυλλαδίου 4, ὡς μὴ προσανατολισμένο καὶ ἐφαρμόστε τὸν ἀλγόριθμο τοῦ Fleury γιὰ νὰ βρεῖτε ἕνα κύκλωμα Euler.

2. Δεῖξτε ὅτι ἂν ἕνα γράφημα μὲ σύνολο κορυφῶν V ἀρτίου πλήθους εἶναι διμερές καὶ Χαμιλτονιανό, καὶ $V = V_1 \cup V_2$ ἡ διαμέριση, ἡ ὁποία τὸ καθιστᾶ διμερές, τότε τὰ σύνολα V_1 καὶ V_2 εἶναι ἰσοπληθῆ.

3. (α′) Ἔστω τὸ γράφημα, τοῦ ὁποίου οἱ κορυφές εἶναι τὰ τετράγωνα μιᾶς σκακιέρας καὶ δύο κορυφές (= τετράγωνα) εἶναι γειτονικές ἂν ἕνας ἵππος μπορεῖ νὰ πάει ἀπὸ τὴ μία στὴν ἄλλη *μὲ μία κίνηση*. Δεῖξτε ὅτι τὸ γράφημα αὐτό εἶναι διμερές.

   (β′) Σὲ ἕνα τετράγωνο, διαφορετικὸ ἀπ' τὸ κεντρικό, μιᾶς 3×3 σκακιέρας εἶναι τοποθετημένος ἕνας ἵππος. Δεῖξτε ὅτι μπορεῖ νὰ περάσει ἀπὸ ὅλα τὰ τετράγωνα, πλὴν τοῦ κεντρικοῦ, ἀκριβῶς μία φορὰ ἀπὸ τὸ καθένα καὶ νὰ καταλήξει ἀπὸ τὸ τετράγωνο ἀπ' τὸ ὁποῖο ξεκίνησε.

   (γ′) Μὲ τὴ βοήθεια τῶν προβλημάτων 2 καὶ 3α′ ἐπινοῆστε μέθοδο ποὺ ἐλέγχει ἂν ἕνας ἵππος, ξεκινώντας ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε τετράγωνο μιᾶς 4×4 σκακιέρας, μπορεῖ νὰ περάσει ἀπὸ ὅλα τὰ τετράγωνα, ἀκριβῶς μία φορά. Ἂν μπορέσετε νὰ γράψετε σχετικὸ πρόγραμμα, θὰ διαπιστώσετε ὅτι αὐτὸ εἶναι ἀδύνατο.

4. Ἔστω τὸ γράφημα, τοῦ ὁποίου οἱ κορυφὲς εἶναι οἱ 8 τριψήφιοι δυαδικοὶ ἀριθμοὶ καὶ δύο κορυφὲς εἶναι γειτονικὲς ἂν διαφέρουν κατὰ ἕνα, ἀκριβῶς, ψηφίο (λ.χ. ἡ κορυφὴ 001 εἶναι γειτονικὴ μὲ τὴν 101, ὄχι ὅμως μὲ τὴν 111). Ἀποδεῖξτε ὅτι αὐτὸ τὸ γράφημα εἶναι Χαμιλτονιανό.

   Ὑπόδειξη: Φαντασθεῖτε τὶς κορυφὲς τοῦ γραφήματος ὡς σημεῖα τοῦ τρισδιαστάτου χώρου. Τὶ γεωμετρικὴ εἰκόνα δίνει τὸ γράφημα ;

   Γενικεῦστε τὸ συμπέρασμα αὐτὸ στὴν περίπτωση τῶν 2^n n-ψηφίων δυαδικῶν ἀριθμῶν.

5. Τὸ πρόβλημα τοῦ *περιοδεύοντος πωλητῆ* (ἢ *γυρολόγου*, ἐπὶ τὸ λαϊκώτερον !) συνίσταται στὸ νὰ βρεῖ κανεὶς ἕνα ἐλάχισστο κύκλωμα Hamilton σὲ ἕνα *πλῆρες* γράφημα, τοῦ ὁποίου οἱ ἀκμὲς ἔχουν «μήκη». Ὁ παρακάτω **ἀλγόριθμος τοῦ πλησιέστερου γείτονα** δίνει ἕνα σχετικὰ σύντομο, ἀλλὰ ὄχι κατ' ἀνάγκην ἐλάχιστο, κύκλωμα Hamilton.

   > Ὡς πρώτη κορυφὴ τοῦ κυκλώματος διάλεξε αὐθαίρετα μία ὁποιαδήποτε. Ὡς δεύτερη κορυφὴ διάλεξε τὴν πλησιέστερη πρὸς τὴν πρώτη κορυφή καὶ σύνδεσέ τις μὲ τὴν ἀντίστοιχη ἀκμὴ τοῦ γραφήματος . Μεταξὺ τῶν κορυφῶν, ποὺ δὲν ἔχεις διαλέξει ἀκόμη, διάλεξε ὡς τρίτη κορυφὴ τοῦ κυκλώματος τὴν πλησιέστερη πρὸς τὴ δεύτερη κορυφή. Σύνδεσε τὴ δεύτερη καὶ τρίτη κορυφὴ μὲ τὴν ἀντίστοιχη ἀκμὴ τοῦ γραφήματος. Μεταξὺ τῶν κορυφῶν, ποὺ δὲν ἔχεις διαλέξει ἀκόμη, διάλεξε ὡς τέταρτη κορυφὴ τοῦ κυκλώματος τὴν πλησιέστερη πρὸς τὴν τρίτη κορυφή. Σύνδεσε τὴν τρίτη καὶ τέταρτη κορυφὴ μὲ τὴν ἀντίστοιχη ἀκμὴ τοῦ γραφήματος. Ἐπανάλαβε τὴ διαδικασία μέχρις ὅτου ἐπιλέξεις ὅλες τὶς κορυφὲς. Ὅταν ἐπιλέξεις τὴν τελευταία κλεῖσε τὸ κύκλωμα, συνδέοντάς την μὲ τὴν πρώτη κορυφή.

   Σημείωση: Ἂν συμβολίσομε μὲ $w(a,b)$ τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὶς ἀκμὲς a καὶ b καὶ ὑποθέσομε ὅτι ἰσχύει ἡ «τριγωνικὴ ἀνισότητα» $w(a,c) \leq w(a,b)+w(b,c)$ γιὰ κάθε τριάδα κορυφῶν a,b,c, τότε τὸ μῆκος d τοῦ μονοπατιοῦ, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸν ἀλγόριθμο τοῦ πλησιέστερου γείτονα, ἀποδεικνύεται ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $d \leq \frac{d_0}{2}(\lceil \log_2 n \rceil + 1)$, ὅπου d_0 τὸ μῆκος τοῦ ἐλαχίστου κυκλώματος Hamilton (δὲν ὑπάρχει, δυστυχῶς, ἀλγόριθμος νὰ τὸ βροῦμε) καὶ n τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν.

   Βρεῖτε ἕνα κύκλωμα Hamilton στὸ παρακάτω γράφημα, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν κορυφή a καὶ ἕνα ἄλλο, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν κορυφὴ d.