Διακριτα Μαθηματικα

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο 3 – Γραφήματα

1. Δεῖξτε πῶς κατασκευάζεται τὸ γράφημα – κατασκευάστε το ἂν εἶναι δυνατόν – ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὰ ἑξῆς :
   (α΄) Οἱ σχέσεις γνωριμίας σὲ μία κοινωνικὴ συνάντηση.
   (β΄) Ἕνα τουρνουά τέννις.
   (γ΄) Οἱ ἀγορὲς στὶς ὁποῖες διαθέτουν τὰ προϊόντα τους ἕνα σύνολο βιομηχανιῶν.
   (δ΄) Οἱ χῶρες ἑνὸς χάρτη.
   (ε΄) Οἱ διαιρέτες τοῦ 60.
   (ϛ΄) Οἱ ἐσωτερικοὶ χῶροι (διάδρομοι καὶ δωμάτια) ἑνὸς σπιτιοῦ καὶ τὸ ἐξωτερικό του (θεωρούμενο ὡς ἕνας χῶρος), μὲ τὶς πόρτες τους (συμπεριλαμβανομένης τῆς εἰσόδου). Ἐννοεῖται ὅτι, ἕνας χῶρος μπορεῖ νὰ ἔχει περισσότερες ἀπὸ μία πόρτες καὶ κάθε πόρτα ἀνοίγει σὲ δύο, ἀκριβῶς, χώρους.
   (ζ΄) Ἡ ἐπίπεδη ἀναπαράσταση τοῦ κύβου, τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου καὶ τοῦ κανονικοῦ ὀκταέδρου (οἱ ἕδρες του εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα).
   (η΄) Οἱ χαιρετισμοί, ποὺ ἀνταλλάσονται μεταξὺ τῶν διαφόρων προσώπων σὲ μία κοινωνικὴ συγκέντρωση. Ἐννοεῖται ὅτι ἰσχύει ὁ στοιχειώδης κανόνας εὐγενείας: ἂν ὁ Α χαιρετίσει τὸν Β, αὐτὸς τοῦ ἀνταποδίδει τὸν χαιρετισμό.

2. (α΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν κορυφῶν ἑνὸς γραφήματος εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.
   (β΄) Ἀναφερόμενοι στὸ πρόβλημα (1η΄), δεῖξτε ὅτι τὸ συνολικὸ πλῆθος τῶν χαιρετισμῶν, ποὺ ἀνταλλάσονται, εἶναι ἄρτιο.

3. Κάποιος βραδυάζεται σὲ μία περιοχή, τῆς ὁποίας τὸ μόνο καταφύγιος εἶναι ἕνας στοιχειωμένος πῦργος. Ὑπάρχει μία εἴσοδος, ποὺ ὁδηγεῖ στὸ ἐσωτερικὸ (δωμάτια καὶ διάδρομοι) τοῦ πύργου. Ἡ πληροφορία, ποὺ ἔχει ὁ ἄνθρωπος εἶναι πώς, ὅταν νυχτώνει γιὰ τὰ καλά, φαντάσματα ἐμφανίζονται σὲ ὅλα τὰ δωμάτια μὲ ἄρτιο πλῆθος πορτῶν, ἀλλά μόνο σὲ αὐτά. Πρὸς τὸ παρόν, ποὺ ὑπάρχει ἀκόμη λίγο φῶς, ὁ ἄνθρωπος ἔχει χρόνο νὰ κινηθεῖ μέσα στὸν πῦργο δίχως νὰ συναντήσει φαντάσματα. Δεῖξτε ὅτι, τελικά, μπορεῖ νὰ καταφύγει σὲ κάποιον

ἐσωτερικὸ χῶρο τοῦ πύργου καὶ νὰ περάσει ἄφοβα τὴ νύχτα του. Δὲν μπορεῖτε νὰ θεωρήσετε δεδομένο ὅτι, γιὰ ὁποιουσδήποτε χώρους ὑπάρχει διαδρομή, ποὺ ὁδηγεῖ ἀπ' τὸν ἕνα στὸν ἄλλο, διότι ὑπάρχουν καὶ μυστικὰ ὑπόγεια περάσματα, τὰ ὁποῖα ὁ ἄνθρωπος ἀγνοεῖ. (Βλ. πρόβλημα (1ϛ′).

4. Ἕνας ἄνθρωπος ($= \alpha$) θέλει νὰ περάσει ἀπὸ τὴ μία ὄχθη τοῦ ποταμοῦ στὴν ἀπέναντι ἕνα λύκο ($= \lambda$), ἕνα πρόβατο ($= \pi$) καὶ ἕνα μεγάλο δεμάτι χόρτα ($= \chi$). Ἡ βάρκα του εἶναι τόσο μικρή, ποὺ ἐπιπλέον τοῦ ἀνθρώπου, ἕνα, τὸ πολύ, ἀπὸ τὰ λ, π, χ μπορεῖ νὰ πάρει. Ἀφ' ἑτέρου, δὲν μπορεῖ νὰ ἀφήσει μόνα τους τὰ ζεύγη λ, π ἢ π, χ, γιὰ εὐνοήτους λόγους !

   (α′) Κάντε ἕνα γράφημα ὡς ἑξῆς: Οἱ **κορυφὲς** παριστάνουν ὅλα τὰ ἐπιτρεπτὰ ὑποσύνολα τοῦ $\{\alpha, \lambda, \pi, \chi\}$, τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμφανισθοῦν στὴν πρώτη ὄχθη. Π.χ. κορυφὴ τοῦ γραφήματος μπορεῖ νὰ εἶναι ἡ $\{\alpha, \pi, \lambda\}$ ὄχι ὅμως καὶ ἡ $\{\pi, \lambda\}$. Ἄλλη κορυφὴ εἶναι, ἐπίσης, ἡ $\{\alpha, \lambda, \pi, \chi\}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἀρχικὴ κατάσταση τοῦ προβλήματος, καθὼς καὶ ἡ $\emptyset$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν κατάσταση ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν ὅλοι ἔχουν περάσει στὴν ἀπέναντι ὄχθη. Ἡ ὕπαρξη **ἀκμῆς** μεταξὺ δύο κορυφῶν K_1, K_2 (δηλ. δύο ἐπιτερεπτῶν ὑποσυνόλων K_1, K_2 τοῦ $\{\alpha, \lambda, \pi, \chi\}$), σημαίνει ὅτι, μὲ ἕνα πέρασμα τῆς βάρκας, τὸ σύνολο K_1 στὴν πρώτη ὄχθη, μεταβάλλεται στὸ K_2.

   (β′) Βρεῖτε ἕνα τρόπο γιὰ νὰ περάσουν ὅλοι ἀπέναντι.

   Προφανῶς, τὸ πρόβλημα λύνεται εὔκολα καὶ μὲ δοκιμές. Ὁ προτεινόμενος τρόπος, ὅμως, ὑποδεικνύει μία μέθοδο ἐπίλυσης ἀναλόγων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα μπορεῖ νὰ εἶναι ἐξαιρετικὰ πολύπλοκα.

5. Στὰ παρακάτω γραφήματα, ὑπολογῖστε μία ἐλάχιστη διαδρομὴ ἀπὸ τὴν κορυφὴ a στὴν κορυφὴ z.