Διακριτα Μαθηματικα

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο 2 – Συνδυαστική

1. Διαθέτω $n = r \cdot k$ κάρτες . (α′) Μὲ πόσους τρόπους μπορῶ νὰ τὶς μοιράσω ἐξ ἴσου σὲ r συγκεκριμένα ἄτομα ; (β′) Μὲ πόσους τρόπους μπορῶ νὰ φτιάξω r ἰσοπληθεῖς σωροὺς ἀπὸ αὐτὲς τὶς κάρτες ; (Δὲν παίζει ρόλο ἡ τοποθέτηση τῶν καρτῶν σὲ κάθε σωρό.) [᾿Απ. $\frac{n!}{(k!)^r}$, $\frac{n!}{r!(k!)^r}$]

   Στὶς ἑπόμενες τρεῖς ἀσκήσεις εἶναι πιθανὸν νὰ σᾶς χρειασθεῖ **ἡ ἀρχὴ τῆς συμπερίληψης-ἐξαίρεσης**.

2. ῾Υπολογῖστε τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ἀκεραίων, ποὺ εἶναι $\leq 70n$ καὶ δὲν διαιροῦνται μὲ κανένα ἀπὸ τοὺς 2,5,7. [᾿Απ. $24n$]

3. ῎Εστω n ἀντικείμενα $a_1, \ldots, a_n$ καὶ r, ρ, s, σ συγκεκριμένοι δεῖκτες ἀπὸ τὸ σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$, μὲ $r \neq s$. Μὲ πόσους τρόπους μποροῦμε νὰ διατάξομε τὰ ἀντικείμενα αὐτά, σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἑπόμενες περιπτώσεις :
   (α′) Τὸ a_r νὰ βρίσκεται στὴ θέση ρ.
   (β′) Τὸ a_r νὰ μὴ βρίσκεται στὴ θέση ρ.
   (γ′) Τὸ a_r νὰ βρίσκεται στὴ θέση ρ καὶ τὸ a_s νὰ μὴ βρίσκεται στὴ θέση σ.
   (δ′) Τὰ a_r, a_s νὰ βρίσκονται στὶς θέσεις ρ καὶ σ, ἀντιστοίχως.
   (ε′) Τὸ a_r νὰ μὴ βρίσκεται στὴ θέση ρ, οὔτε τὸ a_s στὴ θέση σ.
   [᾿Απ. (α′) $(n-1)!$, (β′) $(n-1)!(n-1)$, (γ′) $(n-2)!(n-2)$, (δ′) $(n-2)!$, (ε′) $(n-1)!(n-2)$ ἂν $\sigma = \rho$ καὶ $(n-2)!(n^2-3n+3)$ ἂν $\sigma \neq \rho$.]

4. ῞Ενας θίασος 16 ἠθοποιῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 ἄνδρες καὶ 9 γυναῖκες καὶ πρόκειται νὰ ἀνεβάσει ἕνα ἔργο, ποὺ ἀπαιτεῖ τὴ συμμετοχὴ τριῶν ἀνδρῶν καὶ τεσσάρων γυναικῶν. Μὲ πόσους τρόπους μπορεῖ νὰ γίνει ἡ διανομὴ τῶν ρόλων σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἑπόμενες περιπτώσεις :
   (α′) ῾Οποιδήποτε ἠθοποιοὶ μποροῦν νὰ συμμετάσχουν.
   (β′) Δύο συγκεκριμένοι ἠθοποιοί, ἄνδρας καὶ γυναῖκα, ἀρνοῦνται νὰ παίξουν μαζί.
   (γ′) Δύο συγκεκριμένοι ἠθοποιοί, γυναῖκες καὶ οἱ δύο, ἀρνοῦνται νὰ παίξουν μαζί.
   (δ′) Δύο συγκεκριμένοι ἠθοποιοί, ἄνδρες καὶ οἱ δύο, ἀρνοῦνται νὰ παίξουν μαζί.
   [᾿Απ. (α′) 4410, (β′) 3570, (γ′) 3675, (δ′) 3780]

   Στὶς ἑπόμενες τρεῖς ἀσκήσεις κάντε χρήση τῆς **ἀρχῆς τοῦ περιστερώνα** .

5. Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε θετικὸ ἀκέραιο n, ὑπάρχει ἀκέραιος, διαιρετὸς ἀπὸ τὸν n, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία (στὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως) εἶναι, ἀποκλειστικά, 0 ἤ 1.

6. Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ ὁποιαδήποτε ἐπιλογὴ $n+1$ διαφορετικῶν ἀριθμῶν $a_1, a_2, \ldots,$ a_{n+1}, μέσα ἀπὸ τὸ σύνολο $\{1, 2, \ldots 2n\}$, ὑπάρχει ἕνα, τοὐλάχιστον, ζευγάρι ἀριθμῶν a_i, a_j, $i \neq j$, ποὺ ὁ ἕνας διαιρεῖ τὸν ἄλλο.
(Ὑπόδειξη: Γράψτε κάθε a_i ὑπὸ τὴ μορφὴ $2^k b_i$, μὲ $k \geq 0$ καὶ b_i περιττὸ καὶ δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ζευγάρι a_i, a_j, μὲ $b_i = b_j$.)

7. Ἔστω p πρῶτος ἀριθμὸς καὶ a θετικὸς ἀκέραιος, ποὺ δὲν διαιρεῖται ἀπὸ τὸν p. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει θετικὸς ἐκθέτης n, τέτοιος ὥστε ὁ $a^n - 1$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ p.
(Ὑπόδειξη: Θεωρεῖστε τὶς δυνάμεις a^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων καθενὸς a^k μὲ τὸ p. Ἔχετε, ἐπίσης, ὑπ' ὄψιν ὅτι, ἂν ἕνας πρῶτος διαιρεῖ τὸ γινόμενο δύο ἀκεραίων καὶ δὲν διαιρεῖ τὸν ἕναν ἀπὸ αὐτούς, τότε, ἀναγκαστικά, πρέπει νὰ διαιρεῖ τὸν δεύτερο.)

Τὸ ἑπόμενο πρόβλημα ἀποτελεῖ συνέχεια τοῦ προβλήματος 10 τοῦ Φυλλαδίου 1.

8. Ἔστω ὅτι k, n εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι καὶ $n \leq k$. Ὑπολογῖστε τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων λύσεων $(x_1, \ldots, x_n)$ τῆς ἐξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

(α′) Ὅλα τὰ x_i εἶναι θετικά. [Ἀπ. $\begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$]

(β′) Ὅλα τὰ x_i εἶναι θετικά καὶ ἕνα συγκεκριμένο x_i εἶναι > 6.
[Ἀπ. $\begin{pmatrix} k-7 \\ n-1 \end{pmatrix}$]

(γ′) Ὅλα τὰ x_i εἶναι θετικά καὶ r τὸ πλῆθος συγκεκριμένα x_i $(r \leq n)$ εἶναι > 6.
[Ἀπ. $\begin{pmatrix} k-6r-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$]

(δ′) $1 \leq x_i \leq 6$ γιὰ ὅλα τὰ $i = 1, 2, \ldots n$.
[Ἀπ. $\sum_{r=0}^{s} (-1)^r \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-6r-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$, ὅπου $s = \left[\frac{k-n}{6}\right]$]

(ε′) Ρίχνομε n ζάρια. Ποιὰ ἡ πιθανότητα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεών τους νὰ ἰσοῦται μὲ k, ὅπου $k \geq n$ ἕνας δεδομένος ἀκέραιος ;

(Ὑποδείξεις: (α′) Οἱ θετικὲς λύσεις τῆς ἐξίσωσης εἶναι σὲ 1-1 ἀντιστοιχία μὲ τὶς μὴ ἀρνητικὲς, τῆς ἀντίστοιχης ἐξίσωσης, ἡ ὁποία, στὸ δεξιὸ μέλος, ἔχει $k-n$ ἀντὶ γιὰ k. (β′) Οἱ ζητούμενες λύσεις τώρα εἶναι σὲ 1-1 ἀντιστοιχία μὲ τὶς μὴ ἀρνητικὲς λύσεις, ὅταν στὸ δεξιὸ μέλος , ἀντὶ γιὰ k, ἔχομε $k-n-6$. (γ′) Ὑπόδειξη ἀνάλογη μὲ τὴν προηγούμενη· στὸ δεξιὸ μέλος $k-n-6r$.
(δ′) Χρησιμοποιῆστε τὸ προηγούμενο σκέλος καὶ τὴν ἀρχὴ συμπερίληψης καὶ ἐξαίρεσης.
(ε′) Ἄμεση ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου.)