ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ ἑξάμηνο 2011

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο ἀσκήσεων 7 - Ὑπερβατικὲς Ἐπεκτάσεις

Σὲ ὅλες τὶς ἀσκήσεις αὐτοῦ τοῦ φυλλαδίου, L/K εἶναι ἐπέκταση σωμάτων.

1. Στὸ μάθημα ἀποδείξαμε τὴν πρόταση *Ἂν S εἶναι ὑπερβατικὴ βάση γιὰ τὴν ἐπέκταση L/K, τότε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία: Τὸ $\lambda \in L$ εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ $K(S) \Leftrightarrow S \cup \{\lambda\}$ εἶναι ἀλγεβρικὰ ἐξαρτημένο πάνω ἀπο τὸ K.*
(α′) Ἀποδεῖξτε ὡς πόρισμα τὸ ἑξῆς: Ἂν τὸ $S \subseteq L$ εἶναι ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπὸ τὸ K, τότε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία: Τὸ S εἶναι βάση ὑπερβατικότητας γιὰ τὴν $L/K \Leftrightarrow$ ἡ ἐπέκταση $L/K(S)$ εἶναι ἀλγεβρική.
(β′) Ἔστω ὅτι τὰ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ εἶναι τέτοια ὥστε, τὸ α_1 εἶναι ὑπερβατικὸ πάνω ἀπὸ τὸ K καὶ τὸ α_i εἶναι ὑπερβατικὸ πάνω ἀπὸ τὸ $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ γιὰ κάθε $i = 2, \ldots, n$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ εἶναι βάση ὑπερβατικότητας γιὰ τὴν ἐπέκταση $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/K$.
(γ′) Ἔστω ὅτι τὰ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ εἶναι ὅπως στὸ προηγούμενο ἐρώτημα (β′) καί, ἐπιπλέον, καθένα ἀπὸ τὰ $\beta_1, \ldots, \beta_m \in L$ εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σύνολο $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ εἶναι βάση ὑπερβατικότητας τῆς ἐπέκτασης $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)/K$.

2. Στὸ μάθημα ἀναφέραμε τὸ *λῆμμα τοῦ Zorn*, τὸ ὁποῖο χρησιμοποιήσαμε γιὰ ν' ἀποδείξομε τὴν ὕπαρξη βάσης ὑπερβατικότητας γιὰ τὴν L/K. Μιμηθεῖτε ἐκείνη τὴν ἀπόδειξη καί, χρησιμοποιώντας τὸ λῆμμα τοῦ Zorn, ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς: Ἔστω ὅτι $T \subseteq L$ καὶ ἡ ἐπέκταση $L/K(T)$ εἶναι ἀλγεβρική. Τότε τὸ T περιέχει βάση ὑπερβατικότητας γιὰ τὴν L/K. (Μὴ ξεχνᾶτε ὅτι τὸ $\emptyset$ θεωρεῖται σύνολο ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπ' τὸ K.)

3. Ἔστω ὅτι τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in L$ εἶναι τέτοια ὥστε τὸ $\{\alpha, \beta\}$ εἶναι ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπὸ τὸ K καὶ ἰσχύουν οἱ σχέσεις $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$ καὶ $\alpha^3\beta + \beta\gamma\delta^2 + \alpha\gamma^3 + \beta\delta = 0$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $\{\alpha, \beta\}$ εἶναι βάση ὑπερβατικότητας γιὰ τὴν ἐπέκταση $K(\alpha, \beta, \gamma, \delta)/K$.

4. Ἔστω ὅτι ἡ L/K εἶναι πεπερασμένα παραγόμενη ἐπέκταση.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε ὑποσύνολο τοῦ L, τὸ ὁποῖο εἶναι ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπ' τὸ K, εἶναι κατ' ἀνάγκη πεπερασμένο.
(β′) Ἔστω $S \subseteq L$ ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπ' τὸ K καὶ E ἐνδιάμεση ἐπέκταση τῆς L/K, μὲ τὴν ἐπιπλέον ἰδιότητα ὅτι ἡ ἐπέκταση E/K εἶναι ἀλγεβρική. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ S εἶναι ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο καὶ πάνω ἀπ' τὸ E.

5. Ἔστω ἐπέκταση σωμάτων L/K καὶ $S \subseteq L$.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $S_0 \subseteq S$, ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπ' τὸ K καὶ maximal ὡς πρὸς αὐτὴ τὴν ἰδιότητα.
Ὑπόδειξη. Στὸ μάθημα ἀποδείξαμε ὅτι κάθε ἐπέκταση σωμάτων ἔχει βάση ὑπερβατικότητας. Μιμηθεῖτε ἐκείνη τὴν ἀπόδειξη.
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση $K(S)/K(S_0)$ εἶναι ἀλγεβρική.
(γ′) Ἔστω $s \in S$ καὶ $\lambda \in L$, τὸ ὁποῖο εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπ' τὸ $K(S)$ καὶ ὑπερβατικὸ πάνω ἀπ' τὸ $K(S \setminus \{s\})$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ s εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπ' τὸ $K(S \cup \{\lambda\} \setminus \{s\})$.
Ὑπόδειξη. Μπορεῖ κανεὶς ν' ἀποδείξει αὐτὴ τὴν πρόταση μὲ χρήση τῶν ὁρισμῶν καὶ μόνο. Ἀλλὰ ἡ ἀπόδειξη εἶναι φορτωμένη μὲ πολλὲς τεχνικὲς λεπτομέρειες. Ἐναλλακτικά, μπορεῖτε νὰ κάνετε τὸ ἑξῆς: Δεῖξτε πρῶτα ὅτι ἀρκεῖ ν' ἀποδείξετε τὸ ἐρώτημα μὲ τὸ S_0 στὴ θέση τοῦ S καὶ μετὰ ἐφαρμόσετε τὴν πρόταση τοῦ μαθήματος, ποὺ ἀναφέρεται στὴν ἄσκηση 1. Σημειωτέον ὅτι ἡ ἀπόδειξη ἐκείνης τῆς πρότασης περιέχει τὶς τεχνικὲς λεπτομέρειες, στὶς ὁποῖες ἀναφέρομαι παραπάνω, ὁπότε, κάθε φορὰ ποὺ ἐφαρμόζομε τὴν πρόταση, γλυτώνομε ἀπὸ τὸ νὰ ἐπαναλαμβάνομε ἐκεῖνες τὶς φορτικὲς τεχνικὲς λεπτομέρειες.

6. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε βάση ὑπερβατικότητας τῆς ἐπέκτασης $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ εἶναι ἄπειρη.
Ὑπόδειξη. Μπορεῖτε να χρησιμοποιήσετε ἀναπόδεικτες τὶς ἑξῆς δύο προτάσεις: (1) Ἂν τὸ K εἶναι ἄπειρο σῶμα, τότε ὁ δακτύλιος τῶν πολυωνύμων $K[X_1, \cdots, X_n]$ ἔχει τὸν ἴδιο πληθάριθμο μὲ τὸ K. (2) Ἂν τὸ K εἶναι ἄπειρο σῶμα καὶ ἡ ἐπέκταση L/K εἶναι ἀλγεβρική, τότε τὰ L καὶ K εἶναι ἰσοπληθῆ.
Μὲ χρήση αὐτῶν τῶν προτάσεων (καὶ ὄχι μόνο), μπορεῖτε νὰ ἀποδείξετε ὅτι, ἂν S εἶναι βάση ὑπερβατικότητας τῆς ἐπέκτασης $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ καὶ S εἶναι πεπερασμένη, τότε, ἀφ' ἑνός, τὸ $\mathbb{Q}(S)$ εἶναι ἰσοπληθὲς μὲ τὸ $\mathbb{Q}$ καί, ἀφ' ἑτέρου, τὸ $\mathbb{C}$ εἶναι ἰσοπληθὲς μὲ τὸ $\mathbb{Q}(S)$· ἄτοπο.

7. (Ἡ ἄσκηση αὐτὴ δίδεται ὡς πρόκληση. Εἶναι δύσκολη, ἀλλὰ ὄχι πέρα ἀπὸ τὶς δυνατότητες κάποιου ποὺ παρακολούθησε καλὰ τὸ μάθημα.)
Ἂν ἡ L/K εἶναι πεπερασμένα παραγόμενη ἐπέκταση, τότε κάθε ἐνδιάμεση ἐπέκτασή της εἶναι πεπερασμένα παραγόμενη.
Ὑπόδειξη. Χρησιμοποιήσετε τὴν ἄσκηση 4. Βάσει αὐτῆς δεῖξτε ὅτι ἀρκεῖ ν' ἀποδείξετε τὴν ἄσκηση γιὰ ἐνδιάμεσες ἐπεκτάσεις, ποὺ εἶναι ἀλγεβρικὲς πάνω ἀπ' τὸ K. Θεωρῆστε μία τέτοια ἐνδιάμεση ἐπέκταση E. Ἔστω S μία βάση ὑπερβατικότητας γιὰ τὴν ἐπέκταση L/K. Βάσει τοῦ (β′) τῆς ἀσκήσεως 4, τὸ S εἶναι ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπ' τὸ E. Παρατηρῆστε, ἐπίσης, ὅτι ἡ ἐπέκταση $E(S)/K(S)$ εἶναι πεπερασμένη. Τώρα ἀρχίζει τὸ κάπως τεχνικὸ κομμάτι τῆς ἀπόδειξης: Ἂν τὰ $e_1, \ldots, e_n \in E$ εἶναι K-γραμμικῶς ἀνεξάρτητα[1], δεῖξτε ὅτι τὰ στοιχεῖα αὐτὰ εἶναι καὶ $K(S)$-γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Αὐτὸ συνεπάγεται ἀμέσως ὅτι δὲν μπορεῖ νὰ ὑπάρχουν ὁσοδήποτε πολλὰ K-γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα στὸ E, ὁπότε ἡ E/K εἶναι πεπερασμένου βαθμοῦ, ἄρα καὶ πεπερασμένα παραγόμενη.

[1] Προσοχή! Ἐδῶ μιλοῦμε γιὰ *γραμμικὴ* ἀνεξαρτησία.