ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ ἑξάμηνο 2011

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο ἀσκήσεων 6

Παραδοτέο μέχρι 10-1-2012

Στὶς ἀσκήσεις αὐτοῦ τοῦ φυλλαδίου, τὸ K εἶναι σῶμα. Ὅλες οἱ ἐπεκτάσεις του, καθὼς καὶ ὅλα τὰ ἀλγεβρικὰ στοιχεῖα πάνω ἀπὸ τὸ K, ἐννοοῦνται σὲ κάποια ἀλγεβρικὴ κλειστότητα $\overline{K}$ τοῦ K.

1. (Λῆμμα 1 στὸ μάθημα τῆς 25-11-2011.) Ἂν ἡ ἐπέκταση L/K εἶναι Galois καὶ ἡ ὁμάδα $\mathcal{G}(L/K)$ εἶναι κυκλική, ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἁλυσσίδα διαδοχικῶν ἐπεκτάσεων
$$K = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = L,$$
τέτοια ὥστε E_i/E_{i-1} εἶναι Galois καὶ ὁ βαθμός της εἶναι πρῶτος.
Ὑπόδειξη. Ἔστω $|\mathcal{G}(L/K)| = m$ καὶ $m = p_1 \cdots p_n$ εἶναι ἡ ἀνάλυση τοῦ m σὲ πρώτους (ὄχι κατ' ἀνάγκη διαφορετικούς). Δεδομένου ὅτι ἡ $\mathcal{G}(L/K)$ εἶναι κυκλική, ἔστω $\langle\sigma\rangle$, μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε, μὲ τὴ βοήθεια τοῦ σ, ἁλυσσίδα ὑποομάδων
$$\langle \mathrm{id}\rangle = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots G_1 \lhd G_0 = \mathcal{G}(L/K),$$
ἔτσι ὥστε ἡ G_i νὰ εἶναι κυκλικὴ τάξεως $p_{i+1}\cdots p_n$ $(i = 0,\dots,n-1)$. Γιὰ $i = 0,\dots,n$, ἔστω E_i ἡ ἐνδιάμεση ἐπέκταση, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν G_i (μέσῳ τῆς ἀντιστοιχίας Galois). Γιὰ ὁποιοδήποτε $i = 1,\dots,n$ δικαιολογῆστε τὰ ἑξῆς: (1) Ἡ ἐπέκταση E_i/E_{i-1} εἶναι Galois. (2) $\mathcal{G}(E_i/E_{i-1}) \cong G_{i-1}/G_i$. (3) $|G_{i-1}/G_i| = p_i$.

2. (Λῆμμα 2 στὸ μάθημα τῆς 25-11-2011.) Ἔστω F ἐπέκταση τοῦ K καὶ p πρῶτος. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει πρωταρχικὴ p-ρίζα τῆς μονάδος $\zeta \in \overline{K}$. Δηλαδή, $\zeta^p = 1 \in K$ καὶ κάθε p-ρίζα τῆς μονάδος εἶναι δύναμη τοῦ ζ. Δεῖξτε ὕστερα ὅτι ἡ ἐπέκταση $F(\zeta)/F$ εἶναι Galois, μὲ ὁμάδα Galois ἡ ὁποία εἶναι κυκλική, τάξεως διαιρέτη τοῦ $p-1$.
Ὑπόδειξη. Ἂν $\mathrm{char}K = p$, ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ μόνη p-ρίζα τῆς μονάδος $(1 \in K)$ εἶναι ἡ ἴδια ἡ μονάδα. Ἂν $\mathrm{char}K \neq p$, ἀφοῦ ἀποδείξετε τὴν ὕπαρξη τοῦ ζ καὶ τὸ ὅτι ἡ $F(\zeta)/F$ εἶναι Galois, θὰ ἐξηγήσετε γιατί, ἂν $\sigma \in \mathcal{G}(F(\zeta)/F)$, τὸ $\sigma(\zeta)$ εἶναι δύναμη τοῦ ζ. Παρατηρῆστε, ἐπίσης ὅτι, ἂν $k \equiv k' \pmod p$, τότε $\zeta^k = \zeta^{k'}$. Ὁπότε μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ μιὰ ἀπεικόνιση $\phi : \mathcal{G}(F(\zeta)/F) \to \mathbb{Z}_p^*$, μὲ $\phi(\sigma) = k_\sigma$, ὅπου $\sigma(\zeta) = \zeta^{k_\sigma}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ϕ εἶναι μονομορφισμὸς (ὄχι, κατ' ἀνάγκη 'ἐπί') ὁμάδων. Ἀπὸ αὐτὸ θὰ βγάλετε τὸ συμπέρασμα γιὰ τὶς ἰδιότητες τῆς $\mathcal{G}(F(\zeta)/F)$. Μὴ ξεχνᾶτε ὅτι ἡ $\mathbb{Z}_p^*$ εἶναι κυκλική.

3. (Λῆμμα 3 στὸ μάθημα τῆς 25-11-2011· λύθηκε τότε.) Ἔστω πρῶτος p καὶ E ἐπέκταση τοῦ K, ἡ ὁποία περιέχει μία πρωταρχικὴ p-ρίζα τῆς μονάδος (ἄσκηση 2). Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε $e \in E$, τὸ διώνυμο $X^p - e \in E[X]$, ἢ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπὸ τὸ E, ἢ ἀναλύεται πλήρως σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες

στὸ $E[X]$.

Ὑπόδειξη. Ἔστω $\alpha \in \overline{K}$ κάποια ρίζα τοῦ $X^p - e$. Δεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ρίζες τοῦ $X^p - e$ εἶναι τῆς μορφῆς $\zeta^k \alpha$ μὲ $k \in \mathbb{Z}$. Ἂν $\alpha \in E$, τότε ὅλες οἱ ρίζες τοῦ $X^p - e$ ἀνήκουν στὸ E, ἄρα τὸ $X^p - e$ ἀναλύεται πλήρως σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες στὸ $E[X]$. Ἔστω ὅτι $\alpha \notin E$. Ἂν τὸ $X^p - e$ δὲν ἦταν ἀνάγωγο, θὰ εἶχε ἕνα ἀνάγωγο διαιρέτη $h(X) \in E[X]$ βαθμοῦ $< p$. Τὸ $h(X)$ ἀναλύεται σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες, καθένας ἀπὸ τοὺς ὁποίους εἶναι τῆς μορφῆς $X - \zeta^k \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ σταθερὸς ὅρος τοῦ $h(X)$ εἶναι τῆς μορφῆς $\pm \zeta^\ell \alpha^d$, ὅπου $d = \deg h(X) < p$. Ἀποδεῖξτε ὅτι αὐτὸ ἔρχεται σὲ ἀντίφαση μὲ τὴν ὑπόθεση ὅτι $\alpha \notin E$. Θὰ χρησιμοποιήσετε τὸ ἑξῆς: Ἀφοῦ $1 \leq d < p$, ὁ d εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν p, ἄρα ὑπάρχουν ἀκέραιοι b καὶ c, τέτοιοι ὥστε $br + cp = 1$.

4. (Λῆμμα 4 στὸ μάθημα τῆς 25-11-2011. Λύθηκε τότε, ἀλλὰ ἐδῶ προτείνεται πολὺ ἁπλούστερη ἀπόδειξη.) Ἔστω E ὅπως στὸ Λῆμμα 3 καὶ $u \in \overline{K}$, τέτοιο ὥστε $u \notin E$ καὶ $u^p \in E$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση $E(u)/E$ εἶναι κανονική, βαθμοῦ p.

   Ὑπόδειξη. Ἐξηγῆστε γιατί, βάσει τοῦ Λήμματος 3, τὸ $X^p - e$ εἶναι ἀνάγωγο στὸ $E[X]$. Ἐξηγῆστε γιατὶ τὸ $E(u)$ εἶναι σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $X^p - e$ πάνω ἀπὸ τὸ E, ὁ βαθμός του εἶναι p καὶ ἡ ἐπέκταση $E(u)/E$ εἶναι κανονική. Θὰ χρησιμοποιήσετε τὴν ἄσκηση 7 τοῦ φυλλαδίου 2.

5. (Λῆμμα 5 στὸ μάθημα τῆς 28-11-2011.) Ἔστω ὅτι F εἶναι ἐπέκταση τοῦ K, $p_1, \ldots, p_r$ εἶναι πρῶτοι (ὄχι, κατ' ἀνάγκη, διαφορετικοί) καὶ $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ πρωταρχικὲς p-ρίζες τῆς μονάδος γιὰ $p = p_1, \ldots, p_r$, ἀντιστοίχως. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἁλυσσίδα ἐπεκτάσεων

$$F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = F(\zeta_1, \ldots, \zeta_r),$$

   τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, m$, ἡ ἐπέκταση F_i/F_{i-1} εἶναι Galois καὶ ὁ βαθμός της εἶναι πρῶτος.

   Ὑπόδειξη. Ἔχομε τὴν ἁλυσσίδα

$$F \subseteq F(\zeta_1) \subseteq F(\zeta_1, \zeta_2) \subseteq \cdots \subseteq F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r).$$

   Ἂν δύο διαδοχικὲς ἐπεκτάσεις τῆς ἁλυσσίδας εἶναι ἴσες, ἀφήνομε μόνο τὴ μία, ἔτσι ὥστε στὴν ἁλυσσίδα νὰ ἔχομε παντοῦ $\subsetneqq$. Στὴν ἁλυσσίδα αὐτή, κάθε ἐπέκταση, πῶς προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀμέσως προηγούμενή της; Συνδυᾶστε μετὰ τὸ συμπέρασμά σας μὲ τὶς ἀσκήσεις 2 καὶ 1 γιὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι, στὴν παραπάνω ἁλυσσίδα, ἀνάμεσα σὲ μία ἐπέκταση καὶ τὴν ἀμέσως μεγαλύτερή της ὑπάρχει ἁλυσσίδα ὅπως αὐτὴ ποὺ περιγράφεται στὴν ἐκφώνηση αὐτῆς ἐδῶ τῆς ἄσκησης.

6. (Λῆμμα 6 στὸ μάθημα τῆς 28-11-2011.) Ἔστω ὅτι $p_1, \ldots, p_r$ εἶναι πρῶτοι (ὄχι, κατ' ἀνάγκη, διαφορετικοί) καὶ M ἐπέκταση τοῦ K, ἡ ὁποία περιέχει πρωταρχικὲς p-ρίζες τῆς μονάδος γιὰ $p = p_1, \ldots, p_r$. Θεωροῦμε $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, τέτοια ὥστε $\alpha_1^{p_1} \in M$ καὶ $\alpha_i^{p_i} \in M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ γιὰ $i = 2, \ldots, r$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἁλυσσίδα

$$M = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\ell = M(\alpha_1, \ldots, \alpha_r),$$

τέτοια ὥστε, κάθε διαδοχικὴ ἐπέκταση τῆς ἁλυσσίδας εἶναι κανονικὴ καὶ ὁ βαθμός της εἶναι πρῶτος.
Ὑπόδειξη. Ἔχομε τὴν ἁλυσσίδα

$$M = M_0 \subseteq M(\alpha_1) \subseteq M(\alpha_1, \alpha_2) \subseteq \ldots \subseteq M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r).$$

Παρατηρῆστε ὅτι, σ' αὐτὴ τὴν ἁλυσσίδα, δύο διαδοχικὲς ἐπεκτάσεις εἶναι τῆς μορφῆς $E \subseteq E(\alpha)$, ὅπου $E = M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$, $\alpha = \alpha_i$ καὶ $\alpha^{p_i} \in E$. Ἂν $\alpha \in E$, τότε $E(\alpha) = E$, ὁπότε διαγρᾶψτε τὸ $E(\alpha)$ ἀπὸ τὴν ἁλυσσίδα. Ἂν $\alpha \notin E$, νὰ ἐφαρμόσετε τὴν ἄσκηση 4.