ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ ἑξάμηνο 2011

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο ἀσκήσεων 4

Παραδοτέο μέχρι τὴν Τρίτη 22/11 πρὶν ἀπὸ τὸ μάθημα

1. Στὶς διαλέξεις ἔχομε 'δεῖ ὅτι μία πεπερασμένη ἐπέκταση L/K εἶναι Galois ἄν, καὶ μόνο ἄν, μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες συνθῆκες ἱκανοποιεῖται:

   (α′) $|\mathrm{Aut}(L/K)| = [L : K]$

   (β′) L εἶναι σῶμα ἀνάλυσης κάποιου διαχωρίσιμου πολυωνύμου $\in K[X]$.

   (γ′) $K = \mathcal{F}_L(\mathrm{Aut}(L/K))$

   Ἡ ἄσκηση αὐτὴ προσθέτει ἄλλον ἕνα χαρακτηρισμὸ τῆς ἐπέκτασης Galois. Κατ' ἀρχὰς δίνομε τὸν ἑξῆς ὁρισμό: *Ἡ ἐπέκταση L/K λέγεται κανονικὴ ἂν ἰσχύει τὸ ἑξῆς: Κάθε ἀνάγωγο τοῦ $K[X]$, ποὺ ἔχει μία ρίζα στὸ L, ἀναλύεται πλήρως σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες τοῦ $L[X]$, δηλαδή, ἔχει ὅλες τὶς ρίζες του στὸ L.* Ἰσοδύναμα: *Κάθε ἀνάγωγο πολυώνυμο τοῦ $K[X]$, ἢ δὲν ἔχει καμμία ρίζα στὸ L ἢ ἔχει ὅλες τὶς ρίζες του στὸ L.*
   Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση L/K εἶναι Galois ἄν, καὶ μόνο ἄν,

   (δ′) L/K εἶναι κανονικὴ καὶ διαχωρίσιμη.

   Στὶς παρακάτω ἀσκήσεις θὰ κάνετε χρήση κάποιων ἀπὸ τοὺς χαρακτηρισμοὺς (α′) - (δ′) γιὰ τὶς ἐπεκτάσεις Galois.

2. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ἡ χαρακτηριστικὴ τοῦ σώματος K δὲν εἶναι 2, τότε κάθε ἐπέκταση L/K βαθμοῦ 2 εἶναι Galois. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι κάθε τέτοια ἐπέκταση L/K εἶναι τῆς μορφῆς $L = K(\lambda)$, ὅπου $\lambda \in L \setminus K$ καὶ $\lambda^2 = d \in K$. Διαφορετικὰ διατυπωμένη ἡ τελευταία συνθήκη: $L = K(\sqrt{d})$, $d \in K$, $\sqrt{d} \notin K$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{G}(L/K) = \langle \sigma \rangle$, ὅπου ὁ σ ἔχει τὴν ἰδιότητα $\sigma(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$ γιὰ ὅλα τὰ $a, b \in K$. Γιατὶ ὑπάρχει τέτοιος σ;

3. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ δὲν εἶναι Galois, ἐνῶ ἡ ἐπέκταση $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$, ὅπου $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (παρατηρῆστε ὅτι $\omega^3 = 1$), εἶναι Galois.
   Σχετικὰ μὲ τὸ πολυώνυμο $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες του εἶναι ω καὶ ω^2 $(= -\omega - 1)$ καὶ ὅτι εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Ἔστω $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q})$. Ἀποδεῖξτε (πολὺ προσεκτικά!) ὅτι ὑπάρχουν $\sigma, \tau \in \mathcal{G}(L/K)$ μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες: $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$, $\sigma(\omega) = \omega$ καὶ $\tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$, $\tau(\omega) = \omega^2$. Δεῖξτε ὅτι $\sigma^3 = \mathrm{id}$, $\tau^2 = \mathrm{id}$, $\tau\sigma = \sigma^2\tau$, ἄρα ἡ ὁμάδα ποὺ παράγουν οἱ σ, τ $(= \langle \sigma, \tau \rangle)$ εἶναι ἡ D_3 (ὁμάδα συμμετριῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ποὺ εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν S_3, τὴν ὁμάδα μεταθέσεων τῶν τριῶν πραγμάτων). Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle$.

Δεῖξτε ὅτι τὰ στοιχεῖα $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \omega, \omega\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{4}$ ἀποτελοῦν βάση τῆς L/K. Ἔστω $\lambda = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + d\omega + e\omega\sqrt[3]{2} + f\omega\sqrt[3]{4}$, ὅπου $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$ τὸ τυπικὸ στοιχεῖο τοῦ L. Ποιὰ συνθήκη (ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ) γιὰ τοὺς συντελεστὲς $a, \ldots, f$ προκύπτει ἀπ' τὴ σχέση $\sigma(\lambda) = \lambda$; Ἐξ αὐτῆς συμπεράνατε ποιὸ εἶναι τὸ σταθερὸ σῶμα $\mathcal{F}_L(\langle\sigma\rangle)$. Μὲ ἀνάλογο τρόπο ὑπολογῖστε τὰ $\mathcal{F}_L(\langle\tau\rangle)$ καὶ $\mathcal{F}_L(\langle\sigma\tau\rangle)$.

4. Ἔστω πρῶτος p καὶ ἀκέραιος $n \geq 1$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ εἶναι Galois. Ποιὰ εἶναι ἡ τάξη τῆς $\mathcal{G}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$; Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ αὐτομορφισμὸς τοῦ Frobenius $\sigma : \mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}$, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση $\sigma(\alpha) = \alpha^p$ ἔχει τάξη n καὶ παράγει τὴν ὁμάδα $\mathcal{G}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$. Δηλαδή, $\mathcal{G}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) = \langle\sigma\rangle$ (κυκλικὴ ὁμάδα τάξεως n).