ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ ἑξάμηνο 2011

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο ἀσκήσεων 2

Παραδοτέο μέχρι τὴν Τρίτη 25/10 πρὶν ἀπὸ τὸ μάθημα

1. Ἔστω K_1, K_2 ὑποσώματα τοῦ σώματος L. Μὲ K_1K_2 συμβολίζομε τὸ ἐλάχιστο ὑπόσωμα τοῦ L, ποὺ περιέχει τὸ *σύνολο* $K_1 \cup K_2$. Ἀποδεῖξτε ὅτι

$$K_1K_2 = \bigcap_M M\,, \quad M \text{ ὑπόσωμα τοῦ } L \text{ ποὺ περιέχει τὸ } K_1 \cup K_2.$$

2. Ἔστω ἐπέκταση σωμάτων L/F καὶ K_1, K_2 ἐνδιάμεσες ἐπεκτάσεις ($L \supseteq K_i \supseteq F$, γιὰ $i = 1, 2$). Ἔστω, ἀκόμη, ὅτι $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ εἶναι F-βάση τοῦ K_1 καὶ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ εἶναι F-βάση τοῦ K_2. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:
   (α′) $K_1K_2 = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n)$.
   (β′) Τὰ στοιχεῖα τοῦ K_1K_2 εἶναι F-γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\alpha_i\beta_j$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.
   (γ′) $[K_1K_2 : F] \le [K_1 : F][K_2 : F]$.
   (δ′) Οἱ ἑξῆς συνθῆκες εἶναι ἰσοδύναμες:
      i. $[K_1K_2 : F] = [K_1 : F][K_2 : F]$.
      ii. Τὰ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ εἶναι K_1-γραμμικῶς ἀνεξάρτητα *καὶ* τὰ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ εἶναι K_2-γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.
      iii. Τὰ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ εἶναι K_1-γραμμικῶς ἀνεξάρτητα *εἴτε* τὰ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ εἶναι K_2-γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

3. Ἔστω K σῶμα, $f(X) \in K[X]$ μὴ σταθερὸ καὶ L σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπὸ τὸ K. Ἂν M εἶναι ἐνδιάμεση ἐπέκταση τῆς L/K ($L \supseteq M \supseteq K$), ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ L εἶναι σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $f(X)$ καὶ πάνω ἀπὸ τὸ M.

4. Ἔστω K σῶμα, $f(X) \in K[X]$ μὴ σταθερὸ καὶ L ἐπέκταση τοῦ K, πάνω ἀπὸ τὴν ὁποία τὸ $f(X)$ ἀναλύεται σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες (π.χ. τὸ L θὰ μποροῦσε νὰ εἶναι σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπὸ τὸ K, ἀλλὰ αὐτὸ δὲν εἶναι ἀπαραίτητο): $f(X) = c(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$ μὲ $c \in K$ καὶ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Ἂν τὸ μὴ σταθερὸ πολυώνυμο $g(X) \in K[X]$ διαιρεῖ τὸ $f(X)$, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $g(X)$ ἔχει ἀνάλυση τῆς μορφῆς $g(X) = c'(X - \beta_1) \cdots (X - \beta_m)$, ὅπου $c' \in K$ καὶ $\beta_1, \ldots, \beta_m$ εἶναι ὑπακολουθία τῆς $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

5. Ἔστω σῶμα K, μὴ σταθερὸ $f(X) \in K[X]$ καὶ L τὸ σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ K. Ἀποδεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει γνήσιο ὑπόσωμα M τοῦ L, ποὺ νὰ περιέχει τὸ K καὶ τὸ $f(X)$ νὰ ἀναλύεται πλήρως σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες στὸ $M[X]$.

6. Ἔστω σῶμα K, $f(X) \in K[X]$ βαθμοῦ $n \geq 1$ καὶ L τὸ σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ K. Ἀποδεῖξτε ὅτι $[L : K] \leq n!$.

7. Ἔστω L/K πεπερασμένη ἐπέκταση σωμάτων. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ L εἶναι σῶμα ἀνάλυσης κάποιου πολυωνύμου $\in K[X]$ ἄν, καὶ μόνο ἄν, κάθε ἀνάγωγο τοῦ $K[X]$ ποὺ ἔχει μία ρίζα στὸ L ἀναλύεται πλήρως σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες τοῦ $L[X]$.

   Ὑπόδειξη γιὰ τὴν κατεύθυνση $\Rightarrow$. Διευκολύνει πολὺ νὰ θεωρήσετε ὅτι δουλεύετε μέσα σὲ μιὰ ἀλγεβρικὴ κλειστότητα $\overline{K}$ τοῦ K. Ἔστω ὅτι $f(X) = c(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$, $c \in K^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$ καὶ $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Θεωρῆστε ἕνα ἀνάγωγο $p(X) \in K[X]$, τὸ ὁποῖο ἔχει μία τοὐλάχιστον ρίζα του στὸ L, καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι καὶ κάθε ἄλλη ρίζα του ἀνήκει στὸ L, ὡς ἑξῆς: Φαντασθῆτε τὸ $p(X)$ ἀναλυμένο στὸ $\overline{K}[X]$: $p(X) = u(X - \beta_1) \cdots (X - \beta_m)$, $u \in K^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \overline{K}$. Θεωρῆστε τὸ σῶμα $M = K(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ καὶ τὸ σῶμα LM. Ὑποθέστε ὅτι $\beta_1 \in L$, πάρετε μιὰ ἄλλη ρίζα, ἔστω β_2 καὶ θεωρῆστε τὸν K-ἰσομορφισμὸ ποὺ στέλνει τὸ β_1 στὸ β_2. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ M εἶναι σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $p(X)$ πάνω ἀπὸ τὸ $K(\beta_1)$, καθὼς καὶ πάνω ἀπ' τὸ $K(\beta_2)$. Ἐπεκτείνετε τὸν παραπάνω ἰσομορφισμὸ σὲ αὐτομορφισμὸ τοῦ M. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ LM εἶναι σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπὸ τὸ M καὶ συνεχίσετε τὴν ἐπέκταση τοῦ αὐτομορφισμοῦ τοῦ M σὲ αὐτομορφισμὸ τοῦ LM. Τὸ γεγονὸς ὅτι $\beta_1 \in L$ σᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράψετε $\beta_1 = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ γιὰ κάποιο πολυώνυμο n μεταβλητῶν μὲ συντελεστὲς στὸ K. Ἐφαρμόστε στὴν τελευταία σχέση τὸν αὐτομορφισμὸ τοῦ LM, ποὺ πήρατε πρίν.

8. Γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω πολυώνυμα $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ὑπολογῖστε ὅσο τὸ δυνατὸν ὀλιγώτερα $\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{C}$, ὥστε τὸ $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \ldots)$ νὰ εἶναι σῶμα ἀνάλυσης τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{Q}$.

$$X^4 - 2, \quad X^4 + 2, \quad X^4 + X^2 + 1, \quad X^6 - 4\,.$$