ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ ἑξάμηνο 2011

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Φυλλάδιο ἀσκήσεων 1

Παραδοτέο μέχρι τὴν Παρασκευὴ 14/10 πρὶν ἀπὸ τὸ μάθημα

1. Ἔστω $\sigma : R \to S$ ἰσομορφισμὸς δακτυλίων.

   Γιὰ κάθε $f(X) \in R[X]$ ὁρίζομε τὸ πολυώνυμο $\sigma f(X) \in S[X]$ ὡς ἑξῆς:

   Ἂν $f(X) = \sum_n r_n X^n$ τότε $\sigma f(X) = \sum_n \sigma(r_n) X^n$.

   Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $R[X] \ni f(X) \mapsto \sigma f(X) \in S[X]$ ἐπεκτείνει τὸν ἰσομορφισμὸ σ σὲ ἰσομορφισμὸ τῶν δακτυλίων $R[x]$ καὶ $S[x]$.

   Ὡς πόρισμα ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς: Ἔστω $\sigma : K \to K'$ ἰσομορφισμὸς σωμάτων.

   (α′) Τὸ $p(X) \in K[X]$ εἶναι ἀνάγωγο ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ $\sigma p(X) \in K'[X]$ εἶναι ἀνάγωγο.

   (β′) Ἂν $f(X), g(X) \in K[X]$, $g(X) \neq 0$, τότε $g(X)|f(X)$ ἂν καὶ μόνο ἂν $\sigma g(X)|\sigma f(X)$.

2. Ἔστω L/K ἐπέκταση σωμάτων. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:

   (α′) $[L : K] = 1$ ἂν καὶ μόνο ἂν $L = K$.

   (β′) Ἂν $[L : K]$ εἶναι πρῶτος, τότε δὲν ὑπάρχει γνήσια ἐπέκταση τοῦ K, ποὺ νὰ εἶναι γνήσιο ὑπόσωμα τοῦ L.

   (γ′) Ἂν ἡ ἐπέκταση L/K εἶναι πεπερασμένη καὶ τὸ $\alpha \in L$ ἔχει ἐλάχιστο πολυώνυμο βαθμοῦ n, τότε ὁ n εἶναι διαιρέτης τοῦ $[L : K]$.

3. Ἔστω σῶμα K, $p(X) \in K[X]$ ἀνάγωγο καὶ L ἐπέκταση τοῦ K, ἡ ὁποία περιέχει ρίζα ρ τοῦ $p(X)$. Ἔστω ὅτι τὸ $f(X) \in K[X]$ ἔχει, ἐπίσης, ρίζα τὸ ρ. Ἀποδεῖξτε ὅτι $p(X)|f(X)$.

4. Ὑποθέτομε ὅτι $M/L/K$ εἶναι διαδοχικὲς ἐπεκτάσεις σωμάτων καὶ τὸ $\alpha \in M$ εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ K. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ α εἶναι ἀλγεβρικὸ καὶ πάνω ἀπὸ τὸ L. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμο τοῦ α πάνω ἀπὸ τὸ L διαιρεῖ τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμο τοῦ α πάνω ἀπὸ τὸ K (ἂν θεωρήσομε αὐτὸ τὸ πολυώνυμο ὡς στοιχεῖο τοῦ $L[X]$). Συμπεράνατε ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ α πάνω ἀπὸ τὸ L εἶναι, τὸ πολύ, ἴσος μὲ τὸν βαθμὸ τοῦ α πάνω ἀπὸ τὸ K.

5. Ἔστω L/K ἐπέκταση σωμάτων καὶ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$, τέτοια ὥστε τὸ α_1 εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ K, τὸ α_2 εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ $K(\alpha_1)$ καὶ γενικά, τὸ α_i εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ γιὰ $i = 2, \ldots, n$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

6. Θεωρῆστε τὴν ἐπέκταση $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$, ὅπου α ρίζα τοῦ $X^3-6X^2+9X+3 \in \mathbb{Q}[X]$ (διαπιστῶστε ὅτι εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{Q}$). Ἐκφρᾶστε καθένα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα α^4, α^5, $(\alpha+1)^{-1}$, $(\alpha^2-6\alpha+8)^{-1}$ συναρτήσει τῆς βάσεως $1, \alpha, \alpha^2$.

7. Ἔστω ἡ ἐπέκταση σωμάτων L/K. Ὑποθέτομε ὅτι τὸ $f(X) = X^n - a \in K[X]$ εἶναι ἀνάγωγο, τὸ $\rho \in L$ εἶναι ρίζα τοῦ $f(X)$ καὶ τὸ m εἶναι διαιρέτης τοῦ n. Δεῖξτε ὅτι τὸ $X^{n/m} - a \in K[X]$ εἶναι τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμο τοῦ ρ^m πάνω ἀπὸ τὸ K.

8. Ἔστω ἡ ἐπέκταση σωμάτων L/K. Ἂν τὸ $\alpha \in L$ εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ K καὶ τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμό του πάνω ἀπὸ τὸ K εἶναι περιττοῦ βαθμοῦ, τότε $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.
   (Ὑπόδειξη: Θεωρῆστε τὶς διαδοχικὲς ἐπεκτάσεις $K(\alpha) \supseteq K(\alpha^2) \supseteq K$.)