ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

# $6^{\text{ο}}$ Φυλλάδιο Ἀσκήσεων

1. Στὴν ἄσκηση αὐτή, γιὰ κάθε ὁμάδα $G$, θὰ συμβολίζομε μὲ εκθ$(G)$ τὸν ἐκθέτη τῆς ὁμάδας $G$, δηλαδή, τὸν ἐλάχιστο θετικὸν ἀκέραιο $k$, τέτοιον ὥστε $g^k = e$ (= οὐδέτερο τῆς $G$) γιὰ κάθε $g \in G$.[1] Ἔστω πεπερασμένη ὁμάδα $G$.
   (α$'$) Δεῖξτε ὅτι ὁ εκθ$(G)$ διαιρεῖ τὴν $|G|$.
   (β$'$) Δεῖξτε ὅτι, ἂν ἡ $G$ εἶναι κυκλική, τότε εκθ$(G) = |G|$.
   (γ$'$) Ἔστω ὅτι $G$ εἶναι καρτεσιανὸ γινόμενο ὁμάδων: $G = \prod_{i=1}^{n} H_i$. Δεῖξτε ὅτι ὁ εκθ$(G)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ εκπ$\{$εκθ$(H_1), \ldots,$ εκθ$(H_n)\}$. Ἐπιπλέον, ἂν οἱ ὁμάδες $H_1, \ldots, H_n$ εἶναι κυκλικές, τότε ὁ εκθ$(G)$ διαιρεῖται ἀπὸ τὸ εκπ$\{|H_1|, \ldots, |H_n|\}$.

2. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $E/F$ εἶναι πεπερασμένη ἐπέκταση Kummer βαθμοῦ $n$ καὶ τὸ $F$ περιέχει μία ἀρχικὴ $n$-οστὴ ρίζα τῆς μονάδος, τότε $E/F$ εἶναι ἐπέκταση μὲ ριζικὰ $n$-οστῆς τάξεως.

3. Ἔστω πεπερασμένη ἐπέκταση $E/F$ καὶ $F \leq K \leq E$, μὲ τὴν $K/F$ κανονική. Ἔστω ὅτι τὰ $\alpha, \beta \in E$ εἶναι $F$-ἀλγεβρικῶς συζυγῆ (δηλαδή, ἔχουν τὸ ἴδιο ἐλάχιστο πολυώνυμο πάνω ἀπ' τὸ $F$) καί, γιὰ κάποιο $n \in \mathbb{N}$ εἶναι $\alpha^n \in K$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, τότε καὶ $\beta^n \in K$.

4. Ἔστω ἐπέκταση σωμάτων $E/F$, $S \subseteq E$ καὶ $t \in E$ ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ $F(S)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν $s_1, \ldots, s_r \in S$, διαφορετικὰ μεταξύ τους καὶ διαφορετικὰ τοῦ $t$, τέτοια ὥστε τὸ $\{s_1, \ldots, s_r, t\}$ εἶναι ἀλγεβρικῶς ἐξαρτημένο σύνολο πάνω ἀπ' τὸ $F$.

5. Ἔστω ἐπέκταση σωμάτων $E/F$, $S \subseteq E$ ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπ' τὸ $F$ καὶ $t \in E$, τέτοιο ὥστε τὸ $S \cup \{t\}$ εἶναι ἀλγεβρικῶς ἐξαρτημένο πάνω ἀπὸ τὸ $F$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $t$ εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ $F(S)$.

6. (α$'$) Ἔστω ἐπέκταση $E/F$, $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq E$ ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο πάνω ἀπ' τὸ $F$ καὶ $T \supseteq S$ ὑποσύνολο τοῦ $E$, ποὺ παράγει τὸ $E$ ἀλγεβρικῶς πάνω ἀπὸ τὸ $F$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἕνα σύνολο $B$ μεταξὺ τῶν $S$ καὶ $T$, τὸ ὁποῖο εἶναι βάση ὑπερβατικότητας τῆς $E/F$, ὡς ἑξῆς: Ἔστω $T \setminus S = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Ἂν $T = \emptyset$, τότε $B = S$ εἶναι ἡ ζητούμενη βάση ὑπερβατικότητας. Διαφορετικά, ὁρίζομε $S_0 = S$ καί, ἐπαγωγικά, γιὰ $i = 1, \ldots, m$,

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} & \text{ἂν } \beta_i \text{ εἶναι ἀλγεβρικὸ } /F(S_{i-1}) \\ S_{i-1} \cup \{\beta_i\} & \text{ἂν } \beta_i \text{ δὲν εἶναι ἀλγεβρικὸ } /F(S_{i-1}). \end{cases}$$

   Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $B = S_m$ εἶναι βάση ὑπερβατικότητας τῆς $E/F$.

   *Σημαντικό!* Ἡ παραπάνω ἐκφώνηση ἰσχύει καὶ γιὰ ἄπειρα $S, T$. Ἤτοι,

[1] Ἂν δὲν ὑπάρχουν τέτοιο ἀκέραιοι $k$, τότε, γράφομε εκθ$(G) = \infty$, ἀλλά, στὶς πεπερασμένες ὁμάδες δὲν τίθεται τέτοιο θέμα.

**Πρόταση** *Ἂν ἔχομε μία ἐπέκταση σωμάτων $E/F$, καὶ σύνολα $S, T$, τέτοια ὥστε $S \subseteq T \subseteq E$, μὲ τὸ $S$ ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο $/F$ καὶ τὸ $T$ νὰ παράγει ἀλγεβρικῶς τὸ $E/F$, τότε ὑπάρχει $B$, βάση ὑπερβατικότητας τῆς $E/F$, τέτοια ὥστε $S \subseteq B \subseteq T$.*[2]

*Σὲ ὅλες τὶς ἀσκήσεις, καὶ στὶς ἐξετάσεις, μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιεῖτε τὴν παραπάνω πρόταση.*

(β′) Χρησιμοποιώντας τὴν παραπάνω πρόταση, ἀποδεῖξτε ὅτι, κάθε ὑποσύνολο τοῦ $E$, ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητο $/F$ περιέχεται σὲ κάποια βάση ὑπερβατικότητας τῆς $E/F$· καὶ κάθε ὑποσύνολο τοῦ $E$, ποὺ παράγει ἀλγεβρικῶς τὸ $E/F$ περιέχει μία βάση ὑπερβατικότητας τῆς $E/F$.

7. Ἔστω $E_1, E_2$ ἐπεκτάσεις τοῦ σώματος $F$, οἱ ὁποῖες περιέχονται σὲ κάποιο μεγαλύτερο σῶμα, ὁπότε ἔχει νόημα νὰ θεωρήσομε τὸ σῶμα $E_1E_2$. *Χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσετε* τὴ γενικὴ πρόταση: $F \leq K \leq E \Rightarrow \text{tr.deg}(E/F) = \text{tr.deg}(E/K) + \text{tr.deg}(K/F)$, ἀποδεῖξτε:
   (i) $\text{tr.deg}(E_1E_2/F) \geq \text{tr.deg}(E_i/F)$ γιὰ $i = 1, 2$,
   (ii) $\text{tr.deg}(E_1E_2/F) \leq \text{tr.deg}(E_1/F) + \text{tr.deg}(E_2/F)$.

8. (Προαιρετική!) Θεωρώντας ἀληθῆ τὴν *ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς*, ἀποδεῖξτε ὅτι $\text{tr.deg}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) = \mathfrak{c}$, ὅπου $\mathfrak{c}$ συμβολίζει τὸν πληθάριθμο τοῦ $\mathbb{R}$.
   Ὑπόδειξη. Ἂν $S$ εἶναι βάση ὑπερβατικότητας τῆς $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, τότε $|S| \leq \mathfrak{c}$ (προφανῶς). Ἂν δὲν ἴσχυε τὸ $=$, τότε $S$ εἶναι πεπερασμένο ἢ ἀριθμήσιμο (ἐδῶ ὑπεισέρχεται ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς). Ἔστω, λοιπόν, ὅτι $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$, ὅπου τὰ $s_i$ μπορεῖ νὰ εἶναι πεπερασμένα τὸ πλῆθος, ἢ ἄπειρα. Θεωρῆστε τὶς διαδοχικὲς ἐπεκτάσεις $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3, \ldots) \subseteq \mathbb{C}$ καὶ ἐκτιμῆστε (ἄνω φράγμα) τὸν $|\mathbb{C}|$. Θὰ καταλήξετε σὲ ἄτοπο. Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε τὴν ἑξῆς Πρόταση: *Ἂν $E/F$ εἶναι ἀλγεβρικὴ ἐπέκταση, τότε $|E| = \aleph_0 \cdot |F|$.*

# Ἀναφορὲς


[1] R.B. Ash, *Abstract Algebra-The Basic Graduate Year*. Κεφ. 3.

[2] Ν.Γ. Τζανάκης, *Σημειώσεις τοῦ μαθήματος*, Κεφ.1.

[3] Ἀσκήσεις προπτυχιακοῦ μαθήματος *Θεωρία Σωμάτων* Φυλλάδιο 10


[2] Ἡ ἀπόδειξη εἶναι παρόμοιου τύπου, ἀλλὰ ἀπαιτεῖ τὴ χρήση *ὑπερπεπερασμένης ἐπαγωγῆς*.