ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

5$^{\text{ο}}$ Φυλλάδιο Ἀσκήσεων

1. Ὑπολογῖστε τὸ κυκλοτομικὸ πολυώνυμο τάξεως 24.

2. Σ' αὐτὴ τὴν ἄσκηση, μία καθαρῶς ἀριθμοθεωρητικὴ πρόταση ἀποδεικνύεται πολὺ σύντομα, μὲ ἀλγεβρικὰ μέσα.
   Ἔστω $n \in \mathbb{N}$ καὶ πρῶτος p. Ἀποδεῖξτε ὅτι $n|\phi(p^n - 1)$, ὅπου ϕ εἶναι ἡ γνωστὴ *συνάρτηση τοῦ Euler*, ἀκολουθώντας τὰ παρακάτω βήματα:
   (α′) Ἔστω $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}^*)$ ἡ ὁμάδα τῶν αὐτομορφισμῶν τῆς **ὁμάδας** $\mathbb{F}_{p^n}^*$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ τάξη της εἶναι $\phi(p^n - 1)$.
   (β′) Κάνετε τὴν ἑξῆς γενικὴ παρατήρηση: *Ἂν K εἶναι ὁποιοδήποτε σῶμα καὶ f εἶναι αὐτομορφισμὸς τοῦ K, τότε ὁ περιορισμὸς τοῦ f στὴν πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα K^* εἶναι αὐτομορφισμὸς αὐτῆς τῆς ὁμάδας*. Βάσει αὐτοῦ βρεῖτε μία ὑποομάδα τῆς $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}^*)$, τάξεως n καὶ συμπεράνατε ὅτι $n|\phi(p^n - 1)$.

3. Ἔστω πρῶτος $p, n \in \mathbb{N}$ καὶ $f = X^{p^n} - X - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν τὸ f εἶναι ἀνάγωγο στὸ $\mathbb{F}_p[X]$, τότε, ἢ $n = 1$, ἢ $n = p = 2$. Ἀκολουθῆστε τὰ παρακάτω βήματα (δεκτὸς ὁποιοσδήποτε διαφορετικός, σωστὸς τρόπος ἀπόδειξης). Πρῶτ' ἀπ' ὅλα, συμβολῖστε μὲ $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ (= ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ $\mathbb{F}_p$) μία ρίζα τοῦ f.
   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $\mathbb{F}_p(\alpha)$ περιέχει ὅλες τὶς ρίζες τοῦ f.
   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε $b \in \mathbb{F}_{p^n}$, τὸ $\alpha + b$ εἶναι ρίζα τοῦ f.
   (γ′) Βασισμένοι στὸ (β′), ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathbb{F}_{p^n} \leq \mathbb{F}_p(\alpha)$ καὶ $n = p^i$ γιὰ κάποιο $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
   (δ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_{p^n})$ εἶναι κυκλικὴ καὶ ἔστω τ ἕνας γεννήτοράς της. Ὑπολογῖστε τὴν τάξη τοῦ τ συναρτήσει τοῦ i τοῦ ἐρωτήματος (γ′).
   (ε′) Ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐρωτήματος (δ′), ὑπολογῖστε μίαν ἁπλῆ ἔκφραση τοῦ $\tau^k(\alpha)$ καί, βάσει αὐτῆς, ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ τάξη τοῦ τ εἶναι p.
   (ϛ′) Συνδυάζοντας τὰ (δ′) καὶ (ε′), ἀποδεῖξτε ὅτι $[\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_{p^n}] = p$.
   (ζ′) Κάνοντας χρήση τῶν βαθμῶν τῶν διαδοχικῶν ἐπεκτάσεων $\mathbb{F}_p \leq \mathbb{F}_{p^n} \leq \mathbb{F}_p(\alpha)$, ἀποδεῖξτε ὅτι $np = p^n$ καὶ ἐξ αὐτοῦ συμπεράνατε ὅτι, ἢ $n = 1$, ἢ $n = 2 = p$.

Ἀναφορὲς

[1] R.B. Ash, *Abstract Algebra-The Basic Graduate Year*. Κεφ. 3.

[2] Ν.Γ. Τζανάκης, *Σημειώσεις τοῦ μαθήματος*, Κεφ.1.

[3] Ἀσκήσεις προπτυχιακοῦ μαθήματος *Θεωρία Σωμάτων* Φυλλάδιο 10