ΑΛΓΕΒΡΑ II

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

$\boxed{3^{\text{ο}} \text{ Φυλλάδιο Ἀσκήσεων}}$

1. Ἔστω C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F, $f \in F[X]$ ἀνάγωγο καὶ $\alpha, \beta \in C$ ρίζες τοῦ f. Ἐφαρμόζοντας κατάλληλα τὸ Θεώρημα 3.3.9 τοῦ [1], ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει F-μονομορφισμὸς $\tau : C \hookrightarrow C$, ποὺ στέλνει τὸ α στὸ β. Στὴ συνέχεια, ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ τ εἶναι ἐπί, ἄρα εἶναι αὐτομορφισμὸς τοῦ C.
   Προσοχή! Στὴ λύση σας νὰ μὴ χρησιμοποιήσετε τὸ Θεώρημα 1.1 τοῦ [2].

2. Ἔστω ἀλγεβρικὴ ἐπέκταση E/F καὶ C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ E. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σῶμα C εἶναι ἀλγεβρικὴ κλειστότητα καὶ γιὰ τὸ F.

3. Ἔστω σῶμα F, $D = F[t]$, ὁ δακτύλιος τῶν πολυωνύμων μεταβλητῆς t, μὲ συντελεστὲς ἀπ' τὸ F καὶ $K = F(t)$ τὸ "σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων" (ἔτσι ἔχει ἐπικρατήσει νὰ λέγεται) μεταβλητῆς t.
   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $t \in D$ εἶναι πρῶτο στοιχεῖο τῆς D.
   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πολυώνυμο $X^n - t \in K[X]$ εἶναι ἀνάγωγο.
   (γ′) Ἔστω ὅτι $\operatorname{char} F = p$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πολυώνυμο $X^p - t$, ἂν καὶ ἀνάγωγο στὸ $K[X]$ (σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο ἐρώτημα), δὲν εἶναι διαχωρίσιμο· μάλιστα, ἂν C εἶναι μία ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ K, τὸ πολυ;ωνυμο αὐτὸ ἔχει μία μόνο ρίζα στὸ C.
   Ὑπόδειξη: Δεῖτε αὐτὰ ποὺ ὑπενθυμίζω ἀμέσως μετὰ τὸ Θεώρημα 1.12 τῶν σημειώσεων τοῦ μαθήματος [2].

4. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε ἐπέκταση βαθμοῦ 2 εἶναι κανονική.
   Ὑπόδειξη. Δὲν χρειάζεται νὰ χρησιμοποιήσετε τῦπο ριζῶν δευτεροβάθμιας ἐξίσωσης.

5. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $f = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι ἀνάγωγο στὸ $\mathbb{Q}[X]$. Ἔστω $\alpha \in \mathbb{C}$, ρίζα τοῦ f. Δεῖξτε ὅτι καὶ τὸ $2 - \alpha^2$ εἶναι ρίζα τοῦ f καὶ ὅτι ἡ ἐπέκταση $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ εἶναι κανονική. Τέλος, ἔστω θετικὸς ἀκέραιος n καὶ $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ὥστε $(3+\alpha-\alpha^2)^n = c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2$. (Γιατί, γιὰ κάθε n, ὑπάρχουν τέτοιοι ἀκέραιοι c_0, c_1, c_2;) Ἀποδεῖξτε ὅτι, τότε ἰσχύει καὶ ἡ ἑξῆς σχέση: $(1-\alpha)^n = (c_0 + 2c_1 + 4c_2) + c_2\alpha - (c_1 + c_2)\alpha^2$.

6. Ἔστω E/F ἐπέκταση Galois. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:
   (α′) $F \le K \le E \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{G}(E/K)) \ge K$.
   (β′) $H \le \mathcal{G}(E/F) \Rightarrow \mathcal{G}(E/\mathcal{F}(H)) \ge H$.
   (γ′) $F \le K_1 \le K_2 \le E \Rightarrow \mathcal{G}(E/K_1) \ge \mathcal{G}(E/K_2)$.
   (δ′) $H_1 \le H_2 \le \mathcal{G}(E/F) \Rightarrow \mathcal{F}(H_1) \ge \mathcal{F}(H_2)$.

Ἀναφορὲς

[1] R.B. Ash, *Abstract Algebra-The Basic Graduate Year*. Κεφ. 3.

[2] Ν.Γ. Τζανάκης, *Σημειώσεις τοῦ μαθήματος*, Κεφ.1.