ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς 2ης ἑβδομάδας

1. Ἂν ἡ ἐπέκταση σωμάτων K/F εἶναι βαθμοῦ 1, δεῖξτε ὅτι $K = F$.

2. Ἔστω ἐπέκταση σωμάτων K/F, $f, g \in F[X]$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $g|f$ στὸ $K[X]$, τότε $g|f$ καὶ στὸ $F[X]$.
   Ὑπόδειξη: Ἔστω $f = g \cdot h$, ὅπου $h \in K[X]$. Δεῖξτε ὅτι $h \in F[X]$.

3. Ἔστω σῶμα F, $f \in F[X]$ μὴ σταθερὸ καὶ K σῶμα ἀνάλυσης τοῦ f πάνω ἀπ' τὸ F. Ἔστω $g \in F[X]$ μὴ σταθερὸ πολυώνυμο, ποὺ διαιρεῖ τὸ f. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ g ἀναλύεται πλήρως σὲ πρωτοβάθμιους παράγοντες τοῦ $K[X]$. Εἶναι τὸ K σῶμα ἀνάλυσης τοῦ g πάνω ἀπ' τὸ F;

4. Ἔστω σῶμα F καὶ $p \in F[X]$ ἀνάγωγο. Ἔστω K ἐπέκταση τοῦ F καὶ $u \in K$ ρίζα τοῦ p. Ἀποδεῖξτε ὅτι $[K : F[u]] = [K : F]/\deg p$.

5. Ἔστω ὅτι $F \subseteq E \subseteq K$ εἶναι διαδοχικές ἐπεκτάσεις σωμάτων καὶ $f \in F[X]$ μὴ σταθερό. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν τὸ K εἶναι σῶμα ἀνάλυσης τοῦ f πάνω ἀπ' τὸ F, τότε τὸ K εἶναι σῶμα ἀνάλυσης τοῦ f καὶ πάνω ἀπ' τὸ E.

6. Ἔστω $f = X^4 - 2X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ $f(X+1)$ εἶναι πολυώνυμο Eisenstein ὡς πρὸς τὸν πρῶτο 2, καὶ συμπεράνατε ὅτι τὸ f εἶναι ἀνάγωγο στὸ $\mathbb{Q}[X]$. Ἔστω $\rho \in \mathbb{C}$ μία ρίζα τοῦ f.
   (α′) Βρεῖτε μία βάση καὶ τὸν βαθμὸ τῆς ἐπέκτασης $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \rho]$.
   (β′) Βρεῖτε μία βάση καὶ τὸν βαθμὸ τῆς ἐπέκτασης $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \rho]$.