ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $1^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδας

1. (α′) Ἔστω σῶμα F καὶ $p(X) \in F[X]$ ἀνάγωγο. Ἔστω $K = F[u]$ ἡ ἐπέκταση τοῦ F, ποὺ κατασκευάσαμε στὸ μάθημα, ὅπου τὸ u εἶναι ρίζα τοῦ $p(X)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $F[u] = F(u)$.
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathbb{Q}[\pi] \subsetneq \mathbb{Q}(\pi)$, ὅπου τὸ π, ὡς συνήθως, συμβολίζει τὸν λόγο τὸν λόγο τοῦ μήκους περιφέρειας κύκλου πρὸς τὴ διάμετρό του. Θεωρῆστε γνωστὸ ὅτι ὁ π εἶναι ὑπερβατικὸς ἀριθμός, δηλαδή, δὲν ὑπάρχει μὴ μηδενικὸ πολυώνυμο μὲ ρητοὺς συντελεστές, τοῦ ὁποίου τὸ π νὰ εἶναι ρίζα.

2. Ἔστω σῶμα F, $f \in F[X]$ μὴ μηδενικὸ καὶ $I = \langle f \rangle$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ I εἶναι μεγιστικὸ (maximal) ἰδεῶδες τοῦ δακτυλίου $F[X]$ ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ f εἶναι ἀνάγωγο πολυώνυμο πάνω ἀπ' τὸ F.
Ὑπόδειξη: Ἂν τὸ f εἶναι ἀνάγωγο, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ I εἶναι μεγιστικό, ὡς ἑξῆς. Ὑποθέστε ὅτι J εἶναι ἰδεῶδες τοῦ $F[X]$ καὶ $I \subsetneq J \subseteq F[X]$ καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι, τότε, $1 \in J$, ὁπότε $J = F[X]$.

3. Ἔστω ὅτι τὸ F εἶναι ὑπόσωμα τοῦ σώματος K καὶ S μὴ κενὸ ὑποσύνολο (ὄχι, κατ′ ἀνάγκη, ὑπόσωμα) τοῦ K, πεπερασμένο ἢ ἄπειρο. Ἔστω $F(S)$ τὸ ὑποσύνολο τοῦ K, ποὺ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: *Ἕνα στοιχεῖο $u \in K$ ἀνήκει στὸ $F(S)$ ἂν καὶ μόνο ἂν ὑπάρχουν πεπερασμένα τὸ πλῆθος στοιχεῖα τοῦ S, ἔστω $s_1, \ldots, s_n$, καὶ πολυώνυμα n μεταβλητῶν $f, g \in F[X_1, \ldots, X_n]$, μὲ $g(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$, ἔτσι ὥστε $u = f(s_1, \ldots, s_n)/g(s_1, \ldots, s_n)$.* Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $F(S)$ εἶναι ὑπόσωμα τοῦ K καί, μάλιστα, τὸ ἐλάχιστο ὑπόσωμα τοῦ K, τὸ ὁποῖο περιέχει συγχρόνως τὰ F καὶ S. Δηλαδή, ἂν E εἶναι ὑπόσωμα τοῦ K καὶ $F \cup S \subseteq E$, τότε $E \supseteq F(S)$.