ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Σημειώσεις μεταπτυχιακοῦ μαθήματος [1]

Ν.Γ. Τζανάκης

Τμῆμα Μαθηματικῶν

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ἡράκλειο

[1]Τελευταία ἔκδοση 12-11-2016

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διαχωρισιμότητα

Σὲ τοῦτο τὸ κεφάλαιο, τὰ F, E, K, C συμβολίζουν, πάντα, σώματα. Ὁ συμβολισμὸς $F \le E$ σημαίνει «τὸ F εἶναι ὑπόσωμα τοῦ E». Ἰσοδύναμος συμβολισμός: E/F, ποὺ διαβάζεται «E εἶναι ἐπέκταση τοῦ F».

Συντομογραφία: Ἀντὶ τοῦ «πάνω ἀπὸ τὸ F», συχνά, θὰ γράφομε «$/F$», ὅπως λ.χ., «α ἀλγεβρικὸ $/F$» σημαίνει «τὸ α εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ F».

Συμβολισμοί: $\mathrm{m}(\alpha, F)$ συμβολίζει τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμο τοῦ α πάνω ἀπ' τὸ F. Τὸ $F \hookrightarrow K$ (προσοχὴ στὸ ἄγκιστρο τοῦ βέλους) δηλώνει μονομορφισμό, ἤ, μὲ ἰσοδύναμη διατύπωση, «ἐμφύτευση τοῦ F στὸ K».

Θὰ χρειατοῦμε τὴν ἑξῆς ἄσκηση:

Ἄσκηση 1.1 Ἔστω C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F, $f \in F[X]$ ἀνάγωγο καὶ $\alpha, \beta \in C$ ρίζες τοῦ f.
Ἐφαρμόζοντας κατάλληλα τὸ Θεώρημα 3.3.9 τοῦ [2], ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει F-μονομορφισμὸς $\tau : C \hookrightarrow C$, ποὺ στέλνει τὸ α στὸ β. Στὴ συνέχεια, ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ τ εἶναι ἐπί, ἄρα εἶναι αὐτομορφισμὸς τοῦ C.
Προσοχή! Στὴ λύση σας νὰ μὴ χρησιμοποιήσετε τὸ παρακάτω Θεώρημα 1.1

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα, ποὺ γενικεύει τὴν ἄσκηση 1.1, θὰ μᾶς χρειασθεῖ πολλὲς φορὲς στὸ μάθημα.

Θεώρημα 1.1 *Ἔστω ἰσομορφισμὸς $\sigma : F \to F'$, C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ C καὶ C' ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F'. Τότε ὁ σ ἐπεκτείνεται σὲ ἰσομορφισμὸ $\tilde{\sigma} : C \to C'$.*

Ἀπόδειξη. Βλ. [1] Θεώρημα 8.6, σελ. 495.

□

Πρόταση 1.2 *Ἔστω ἀνάγωγο $f \in F[X]$ καὶ C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F. Τότε, ὅλες οἱ ρίζες τοῦ f στὸ C ἔχουν τὴν ἴδια πολλαπλότητα.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι $\alpha, \beta \in C$ είναι ρίζες τοῦ f καὶ $\tau : C \to C$ ὁ F-αὐτομορφισμὸς τοῦ C, ποὺ στέλνει τὸ α στὸ β (ἄσκηση 1.1). Θεωροῦμε τὸν ἰσομορφισμὸ δακτυλίων $\tau : C[X] \to C[X]$, ὁ ὁποῖος ἐπεκτείνει τὸν τ. Ἔστω r ἡ πολλαπλότητα τῆς α στὸ f, ὁπότε $f = (X-\alpha)^r g$, ὅπου $g \in C[X]$ καὶ $g(\alpha) \neq 0$. Ὁ τ ἀφήνει ἀναλλοίωτα τὰ στοιχεῖα τοῦ F, ἄρα $f = \tau f = (X - \tau(\alpha))^r \tau g = (X-\beta)^r \tau g$. Εἶναι $g(\alpha) \neq 0$, ἄρα $\tau(g(\alpha)) \neq 0$, δηλαδή, $\tau g(\beta) \neq 0$. Αὐτό, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν τελευταία ἰσότητα, σημαίνει ὅτι ἡ πολλαπλότητα τῆς ρίζας β

τοῦ f εἶναι r.

$\square$

Πόρισμα 1.3 *Ἔστω ἀνάγωγο $f \in F[X]$, C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F καὶ $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in C$ ὅλες οἱ διαφορετικὲς ῥίζες τοῦ f. Τότε, ἡ ἀνάλυση τοῦ f στὸ $C[X]$ εἶναι τῆς μορφῆς $f = b(X - \alpha_1)^\nu \cdots (X - \alpha_k)^\nu$ γιὰ κάποιο $b \in F$ -ὁ συντελεστὴς μεγιστοβαθμίου ὅρου τοῦ f- καὶ ν θετικὸ ἀκέραιο -ἡ κοινὴ για ὅλες τὶς ῥίζες πολλαπλότητα .*

Ὁρισμός. Ἔστω E/F καὶ $\alpha, \beta \in E$ ἀλγεβρικὰ $/F$. Λέμε ὅτι τὰ α, β εἶναι $F-$συζυγῆ, ἂν $\mathrm{m}(\alpha, F) = \mathrm{m}(\beta, F)$.

Ἄσκηση 1.2 Ἔστω E/F πεπερασμένη καὶ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ μία βάση τῆς ἐπέκτασης. Δεῖξτε ὅτι $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Λήμμα 1.4 *Ἔστω C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F, C' ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F' καὶ $\sigma : F \to F'$ ἰσομορφισμός. Ἂν E εἶναι πεπερασμένη ἐπέκταση τοῦ F, τότε ὁ σ μπορεῖ νὰ ἐπεκταθεῖ σὲ πεπερασμένους τὸ πλῆθος μονομορφισμοὺς $E \hookrightarrow C'$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ βάση τῆς E/F καὶ $\tau : E \hookrightarrow C'$, ὁ ὁποῖος ἐπεκτείνει τὸν $\sigma : F \to F' \subseteq C'$. Κάθε $e \in E$ γράφεται ὡς $e = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$, ὅπου $c_1, \dots, c_n \in F$, ὁπότε $\tau(e) = \sum_{i=1}^n \tau(c_i)\tau(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n \sigma(c_i)\tau(\alpha_i)$. Ἐπειδὴ ὁ σ εἶναι δεδομένος, ἡ τιμὴ $\tau(e)$ προσδιορίζεται πλήρως ἀπὸ τὶς τιμὲς $\tau(\alpha_i)$. Συνεπῶς, ἀρκεῖ νὰ δείξομε ὅτι, γιὰ κάθε $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, οἱ δυνατὲς τιμὲς γιὰ τὸ $\tau(\alpha)$ εἶναι πεπερασμένες τὸ πλῆθος. Ἔστω $\mathrm{m}(\alpha, F) = b_r X^r + \cdots + b_1 X + b_0$. Τότε:

$$\begin{aligned} b_r\alpha^r + \cdots + b_1\alpha + b_0 = 0 &\Rightarrow \tau(b_r)\tau(\alpha)^r + \cdots + \tau(b_1)\tau(\alpha) + \tau(b_0) = 0 \\ &\Rightarrow \sigma(b_r)\tau(\alpha)^r + \cdots + \sigma(b_1)\tau(\alpha) + \tau(b_0) = 0. \end{aligned}$$

Ἄρα, $\tau(\alpha)$ εἶναι ρίζα τοῦ $\sigma(\mathrm{m}(\alpha, F))$ καί, συνεπῶς, οἱ δυνατὲς τιμὲς γιὰ τὸ $\tau(\alpha)$ εἶναι πεπερασμένες τὸ πλῆθος.

$\square$

Θεώρημα-Ορισμός 1.5 *Ἔστω C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F, C' ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F', ἰσομορφισμὸς $\sigma : F \to F'$ καὶ E εἶναι πεπερασμένη ἐπέκταση τοῦ F. Τότε, τὸ πεπερασμένο πλῆθος τῶν μονομορφισμῶν $E \hookrightarrow C'$, οἱ ὁποῖοι ἐπεκτείνουν τὸν σ, εἶναι ἀνεξάρτητο τῶν F', σ, C' καὶ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπὸ τὴν ἐπέκταση E/F. Τὸ πλῆθος αὐτὸ συμβολίζεται $\{E : F\}$ καὶ ὀνομάζεται δείκτης τῆς ἐπέκτασης E/F.*

Ἀπόδειξη. Γιὰ $i = 1, 2$, ἔστω $\sigma_i : F \to F'_i$ ἰσομορφισμός, C'_i ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F'_i. Θὰ δείξομε ὅτι, σὲ κάθε ἐπέκταση $\tau_1 : E \hookrightarrow C'_1$ τοῦ σ_1 ἀντιστοιχεῖ μονοσήμαντα μία ἐπέκταση $\tau_2 : E \hookrightarrow C'_2$ τοῦ σ_2.

$$\begin{tikzcd}
C'_1 \arrow[rr, "\lambda", "\text{ἐπεκτείνει τὸν } \sigma_2\sigma_1^{-1}"'] \arrow[d, dash] & & C'_2 \arrow[d, dash] \\
\tau_1(E) \arrow[d, dash] & E \arrow[l, "\tau_1", "\tau_1|_F = \sigma_1"'] \arrow[r, "\tau_2", "\tau_2|_F = \sigma_2"'] \arrow[d, dash] & \tau_2(E) \arrow[d, dash] \\
F'_1 & F \arrow[l, "\sigma_1"] \arrow[r, "\sigma_2"] & F'_2
\end{tikzcd}$$

Πράγματι, ἔχομε τὸν ἰσομορφισμὸ $\sigma_2\sigma_1^{-1} : F_1' \to F_2'$. Βάσει τοῦ Θεωρήματος 1.1, αὐτὸς ἐπεκτείνεται σὲ ἰσομορφισμὸ $\lambda : C_1' \to C_2'$. Ὁρίζομε τὴν ἀπεικόνιση $\tau_2 = \lambda\tau_1 : E \to C_2'$. Προφανῶς, ἡ ἀπεικόνιση αὐτὴ εἶναι μονομορφισμός. Ἐπιπλέον, ὁ τ_2 ἐπεκτείνει τὸν σ_2, διότι, ἂν $b \in F$, τότε $\tau_2(b) = \lambda(\tau_1(b)) = \lambda(\sigma_1(b)) = \sigma_2\sigma_1^{-1}(\sigma_1(b)) = \sigma_2(b)$. Εἶναι, ἐπίσης, προφανὲς ὅτι, σὲ διαφορετικὲς ἐπεκτάσεις $\tau_1 : E \hookrightarrow C_1'$ τοῦ σ_1 ἀντιστοιχοῦν διαφορετικὲς ἐπεκτάσεις $\tau_2 = \lambda\tau_1 : E \hookrightarrow C_2'$. Συνεπῶς, ὑπάρχει μία 1-1 ἀπεικόνιση ἀπὸ τὸ σύνολο T_1 τῶν $\tau_1 : E \hookrightarrow C_1'$, ποὺ ἐπεκτείνουν τὸν σ_1, στὸ σύνολο T_2 τῶν $\tau_2 : E \hookrightarrow C_2'$, ποὺ ἐπεκτείνουν τὸν σ_2. Λόγῳ συμμετρίας, ἐντελῶς ἀνάλογα συμπεραίνομε ὅτι ὑπάρχει 1-1 ἀπεικόνιση ἀπὸ τὸ T_2 στὸ T_1, ἄρα τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ἰσοπληθῆ.

□

Πόρισμα-Ὁρισμός 1.6 *Ἔστω E/F πεπερασμένη ἐπέκταση καὶ C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F. Τότε, τὸ πλῆθος τῶν $\tau : E \hookrightarrow C$, οἱ ὁποῖοι ἐπεκτείνουν ἕνα δοθέντα $\sigma : F \hookrightarrow C$ εἶναι ἀνεξάρτητο τοῦ σ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸν δείκτη $\{E : F\}$ τῆς E/F. Εἰδικώτερα, ὁ δείκτης $\{E : F\}$ ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν F-μονομορφισμῶν $E \hookrightarrow C$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\sigma : F \hookrightarrow C$. Στὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 1.5, ἂς πάρομε $F_1' = \sigma(F)$, $\sigma_1 = \sigma$, $C_1' = C$, $F_2' = F$, $\sigma_2 = \mathbf{id}_F$, $C_2' = C$. Τότε, τὸ πλῆθος τῶν $\tau_1 : E \hookrightarrow C$, ποὺ ἐπεκτείνουν τὸν $\sigma_1 = \sigma$ ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν $\tau_2 : E \hookrightarrow C$, ποὺ ἐπεκτείνουν τὸν $\mathbf{id}_F$, δηλαδή, μὲ τὸ πλῆθος τῶν F-μονομορφισμῶν $E \hookrightarrow C$. Βάσει τοῦ Θεωρήματος 1.5, τὸ κοινὸ αὐτὸ πλῆθος εἶναι ὁ δείκτης $\{E : F\}$.

□

Πρόταση 1.7 *Ἔστω C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F καὶ $\alpha \in C$. Τότε ὁ βαθμὸς $[F(\alpha) : F]$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ δείκτη $\{F(\alpha) : F\}$. Ἐπιπλέον, τὸ α εἶναι διαχωρίσιμο $/F$ ἂν καὶ μόνο ἂν $[F(\alpha) : F] = \{F(\alpha) : F\}$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\mathrm{m}(\alpha, F) = c(X-\alpha_1)^\nu \cdots (X-\alpha_k)^\nu$ ἡ ἀνάλυση τοῦ $\mathrm{m}(\alpha, F)$ στὸ $C[X]$, ὅπου $c \in F$ καὶ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους -τὸ α εἶναι ἕνα ἀπ' τὰ α_i- σύμφωνα μὲ τὸ Πόρισμα 1.3. Κάθε F-μονομορφισμὸς $F(\alpha) \hookrightarrow C$ στέλνει τὸ α σὲ κάποιο α_j, ἄρα ὑπάρχουν ἀκριβῶς k τὸ πλῆθος μονομορφισμοὶ $F(\alpha) \hookrightarrow C$, δηλαδή, $\{F(\alpha) : F\} = k$. Ἀφ' ἑτέρου, $[F(\alpha) : F] = \deg \mathrm{m}(\alpha, F) = k\nu$, ἀπ' ὅπου προκύπτει ὁ πρῶτος ἰσχυρισμὸς τῆς πρότασης. Βλέπομε, βάσει τῶν παραπάνω, ὅτι ἡ ἰσότητα $[F(\alpha) : F] = \{F(\alpha) : F\}$ ἰσχύει ἂν καὶ μόνο ἂν $\nu = 1$, δηλαδή, ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ α εἶναι διαχωρίσιμο $/F$.

□

Θεώρημα 1.8 *Ἂν $F \le E \le K$ καὶ ἡ K/F εἶναι πεπερασμένη, τότε $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\{E : F\} = n$ καὶ $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ὅλοι οἱ F-μονομορφισμοὶ $E \hookrightarrow C$, ὅπου C εἶναι ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ K (ἄρα καὶ τοῦ F), καὶ $\{K : E\} = m$. Ἔστω F-μονομορφισμὸς $\tau : K \hookrightarrow C$. Ὁ $\sigma = \tau_{|E}$ εἶναι F-μονομορφισμὸς $E \hookrightarrow C$, ἄρα $\sigma = \sigma_i$ γιὰ κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$. Προφανῶς, ὁ τ εἶναι μονομορφισμὸς $K \hookrightarrow C$, ποὺ ἐπεκτείνει τὸν $\sigma = \sigma_i : E \hookrightarrow C$. Ἀπὸ τὸ Πόρισμα 1.6, ὁ σ μπορεῖ νὰ ἐπεκταθεῖ μὲ $\{K : E\} = m$ διαφορετικοὺς τρόπους σὲ μονομορφισμὸ $K \hookrightarrow C$, ἄρα ὑπάρχουν ἀκριβῶς mn τὸ πλῆθος F-μονομορφισμοὶ $\tau : K \hookrightarrow C$. Δηλαδή, $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$.

□

Πρόταση 1.9 *Ἂν ἡ E/F εἶναι πεπερασμένη, τότε ὁ δείκτης $\{E : F\}$ διαιρεῖ τὸν βαθμὸ $[E : F]$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ E (ἄρα καὶ τοῦ F) καὶ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C$, τέτοια ὥστε $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Εἶναι

$$[E : F] = [F(\alpha_1) : F][F(\alpha_1, \alpha_2) : F(\alpha_1)] \cdots [F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}].$$

Ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.7 ξέρομε ὅτι ὁ βαθμὸς $[F(\alpha_1) : F]$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ δείκτη $\{F(\alpha_1) : F\}$ καί, πάλι ἀπ' τὴν ἴδια πρόταση, γιὰ $i = 2, \ldots, n$, ὁ βαθμὸς $[F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}]$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ δείκτη $\{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\}$. Συνεπῶς, ὁ βαθμὸς $[E : F]$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ

$$\{F(\alpha_1) : F\}\{F(\alpha_1, \alpha_2) : F(\alpha_1)\} \cdots \{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}.$$

Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 1.8, τὸ τελευταῖο γινόμενο ἰσοῦται μὲ $\{E : F\}$.

□

Πρόταση 1.10 *Ἔστω C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ F καὶ $\alpha \in C$. Ἂν τὸ α εἶναι διαχωρίσιμο $/F$, τότε καὶ ἡ ἐπέκταση $F(\alpha)$ εἶναι διαχωρίσιμη $/F$.*

Ἀπόδειξη. Μὲ τὶς ὑποθέσεις τῆς πρότασης, ἔστω $\beta \in F(\alpha)$. Ἂν τὸ β δὲν εἶναι διαχωρίσιμο $/F$, τότε, ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.7 συμπεραίνομε ὅτι $\{F(\beta) : F\} < [F(\beta) : F]$. Ἀλλὰ τότε, κάνοντας χρήση καὶ τοῦ Θεωρήματος 1.8, ἔχομε:

$$\{F(\alpha) : F\} = \{F(\alpha) : F(\beta)\}\{F(\beta) : F\} < [F(\alpha) : F(\beta)][F(\beta) : F] = [F(\alpha) : F].$$

Δηλαδή, γιὰ τὸ α, ποὺ εἶναι διαχωρίσιμο $/F$, ἰσχύει $\{F(\alpha) : F\} < [F(\alpha) : F]$ καὶ αὐτὸ ἀντιβαίνει στὴν Πρόταση 1.7.

□

Θεώρημα 1.11 *Ἡ πεπερασμένη ἐπέκταση E/F εἶναι διαχωρίσιμη ἂν καὶ μόνο ἂν $\{E : F\} = [E : F]$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω C ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ E (ἄρα καὶ τοῦ F) καὶ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C$, τέτοια ὥστε $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Ἔστω ὅτι ἡ E/F εἶναι διαχωρίσιμη. Τότε, ὅλα τὰ α_i εἶναι διαχωρίσιμα $/F$, ἄρα, γιὰ κάθε $i = 2, \ldots, n$, τὸ α_i εἶναι διαχωρίσιμο $/F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$. Συνεπῶς, ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.7, $\{F(\alpha_1) : F\} = [F(\alpha_1) : F]$ καί, γιὰ κάθε $i = 2, \ldots, n$, $\{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\} = [F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}]$. Ἀπὸ τὴν πολλαπλασιαστικότητα τῶν δεικτῶν διαδοχικῶν ἐπεκτάσεων (Θεώρημα 1.8) καθὼς καὶ τὴν πολλαπλασιαστικότητα τῶν βαθμῶν διαδοχικῶν ἐπεκτάσεων, ἔπεται ὅτι $\{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n : F\} = [F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n : F]$, δηλαδή, $\{E : F\} = [E : F]$.

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι $\{E : F\} = [E : F]$. Θεωροῦμε τυχαῖο $\alpha \in E$ καὶ θὰ δείξομε ὅτι τὸ α εἶναι διαχωρίσιμο $/F$. Πράγματι, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 1.8 ξέρομε ὅτι $\{E : F\} = \{E : F(\alpha)\}\{F(\alpha) : F\}$. Ἐπίσης, $[E : F] = [E : F(\alpha)][F(\alpha) : F]$. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.7, εἶναι $\{E : F(\alpha)\} \leq [E : F(\alpha)]$ καὶ $\{F(\alpha) : F\} \leq [F(\alpha) : F]$. Ἄρα, γιὰ νὰ ἰσχύει ἡ ἰσότητα $\{E : F\} = [E : F]$, πρέπει στὶς δύο τελευταῖες ἀνισο-ισότητες νὰ ἰσχύει τὸ $=$. Συνεπῶς, $\{F(\alpha) : F\} = [F(\alpha) : F]$, ἄρα, πάλι ἀπ' τὴν Πρόταση 1.7, τὸ α εἶναι διαχωρίσιμο $/F$.

□

Θεώρημα 1.12 *Ἔστω $F \leq E \leq K$ καὶ ἡ K/F εἶναι πεπερασμένη. Τότε, ἰσχύει ὅτι ἡ K/F εἶναι διαχωρίσιμη ἂν καὶ μόνο ἂν κάθε μία ἀπὸ τὶς E/F καὶ K/E εἶναι διαχωρίσιμη.*

Ἀπόδειξη. Ἂν ἡ F/K εἶναι διαχωρίσιμη τότε εἶναι πολὺ ἁπλὸ ν' ἀποδείξει κανεὶς ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὶς E/F καὶ K/E εἶναι διαχωρίσιμη (βλ. π.χ. Λῆμμα 3.4.7 τοῦ [2]).

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὶς E/F καὶ K/E εἶναι διαχωρίσιμη. Τότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 1.11, $\{K : E\} = [K : E]$ καὶ $\{E : F\} = [E : F]$, ἄρα, $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\} = [K : E][E : F] = K : F]$, ποὺ σημαίνει, λόγῳ, πάλι, τοῦ Θεωρήματος 1.11, ὅτι ἡ K/F εἶναι διαχωρίσιμη.

□

Σχετικὰ μὲ τὸ παράδειγμα 3.4.8 τοῦ [2]. Ἐν συντομίᾳ ὑπενθυμίζομε κάποιες γνώσεις τῆς Θ. Δακτυλίων, λίγο πέρα ἀπὸ τὶς στοιχειώδεις· δεῖτε, π.χ. τὸ Κεφάλαιο 1 τοῦ [4].

• Ἔστω περιοχὴ κυρίων ἰδεωδῶν D. Μὲ D^* συμβολίζομε τὴν πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα τῶν μονάδων (= ἀντιστρέψιμων στοιχείων) τῆς D. Κάθε στοιχεῖο $p \in D$, τὸ ὁποῖο δὲν μπορεῖ νὰ γραφτεῖ ὡς γινόμενο ab μὲ $a, b \notin D^*$, ἱκανοποιεῖ τὴ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα: $p|cd \Rightarrow p|c \vee p|d$. Ἕνα τέτοιο p χαρακτηρίζεται *πρῶτο στοιχεῖο* τῆς D.

• *Γενικευμένο κριτήριο Eisenstein.* Ἔστω περιοχὴ κυρίων ἰδεωδῶν D καὶ $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in D[X]$. Ἂν ὑπάρχει πρῶτο στοιχεῖο $p \in D$, μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες: $p \nmid a_n$, $p|a_i$ $\forall i = 0, 1, \ldots n-1$, $p^2 \nmid a_0$, τότε τὸ f δὲν μπορεῖ ν' ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενο δύο μὴ σταθερῶν πολυωνύμων τοῦ $D[X]$.

• *Γενικευμένο Λῆμμα τοῦ Gauss.* Ἔστω περιοχὴ κυρίων ἰδεωδῶν D. Ἂν ἕνα μὴ σταθερὸ $f \in D[X]$ δὲν μπορεῖ ν' ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενο δύο μὴ σταθερῶν πολυωνύμων τοῦ $D[X]$, τότε, οὔτε σὲ γινόμενο δύο μὴ σταθερῶν πολυωνύμων τοῦ $Q(D)[X]$ μπορεῖ ν' ἀναλυθεῖ, ὅπου $Q(D)$ εἶναι τὸ σῶμα-πηλίκων τῆς D.

Ἄσκηση 1.3 Ἔστω σῶμα F, $D = F[t]$, ὁ δακτύλιος τῶν πολυωνύμων μεταβλητῆς t, μὲ συντελεστὲς ἀπ' τὸ F καὶ $K = F(t)$ τὸ "σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων" (ἔτσι ἔχει ἐπικρατήσει νὰ λέγεται) μεταβλητῆς t.

α'. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $t \in D$ εἶναι πρῶτο στοιχεῖο τῆς D.

β'. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πολυώνυμο $X^n - t \in K[X]$ εἶναι ἀνάγωγο.

γ'. Ἔστω ὅτι $\operatorname{char} F = p$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πολυώνυμο $X^p - t$, ἂν καὶ ἀνάγωγο στὸ $K[t]$ (σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο ἐρώτημα), δὲν εἶναι διαχωρίσιμο· μάλιστα, ἂν C εἶναι μία ἀλγεβρικὴ κλειστότητα τοῦ K, τὸ πολυ;ωνυμο αὐτὸ ἔχει μία μόνο ρίζα στὸ C.

Κεφάλαιο 2

Βοηθητικὲς Προτάσεις

Οἱ παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιοῦνται στὸ [3]

Θεώρημα 2.1 *Κάθε πεπερασμένη ὑποομάδα τῆς πολλαπλασιαστικῆς ὁμάδας ἑνὸς σώματος εἶναι κυκλική.*

Ἀπόδειξη. Βλ. [3, Θεώρημα 6.4.4]

□

Στὴν ἀπόδειξη τοῦ παραπάνω θεωρήματος χρησιμοποιεῖται ἡ ἑξῆς πρόταση τῆς Θεωρίας Ὁμάδων:

Πρόταση 2.2 *Ἂν τὰ a, b εἶναι στοιχεῖα μιᾶς ἀβελιανῆς ὁμάδας G, τῶν ὁποίων οἱ τάξεις εἶναι m, n, ἀντιστοίχως, τότε ἡ G περιέχει στοιχεῖο τάξεως* $\text{εκπ}(m, n)$.

Ἀπόδειξη.

□

Πρόταση 2.3 Παραλλαγὴ τοῦ Λήμματος τοῦ Gauss. *Ἔστω ὅτι τὰ πολυώνυμα $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι μονικὰ καὶ τὸ γινόμενο $f \cdot g$ ἔχει ἀκέραιους συντελεστές. Τότε καθένα ἀπὸ τὰ f, g ἔχει ἀκέραιους συντελεστές.*

Ἀπόδειξη.

□

Βιβλιογραφία

[1] J.B. Fraleigh, *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1994.

[2] R.B. Ash, *Abstract Algebra-The Basic Graduate Year*. Κεφ. 3.

[3] R.B. Ash, *Abstract Algebra-The Basic Graduate Year*. Κεφ. 6.

[4] *Ν.Γ. Τζανάκης* Θεωρία Δακτυλίων