ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2014-2015

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Θεώρημα 1 *Ὁ δακτύλιος τῶν ἀκεραίων εἶναι περιοχὴ κυρίων ἰδεωδῶν.*

Ἀπόδειξη Ἔστω I ἰδεῶδες τοῦ $\mathbb{Z}$. Ἂν $I = \{0\}$, τότε $I = \langle 0\rangle$. Ἂν $I \neq \{0\}$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος $a \neq 0$, ὁ ὁποῖος ἀνήκει στὸ I. Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἰδιότητα τῶν ἰδεωδῶν συμπεραίνομε ὅτι καὶ $-a \in I$, ἄρα ὑπάρχουν θετικοὶ ἀκέραιοι μέσα στὸ I. Ἔστω r ὁ ἐλάχιστος θετικὸς ἀκέραιος, ποὺ ἀνήκει στο I. Θὰ δείξομε ὅτι $I = \langle r\rangle$.

Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἰδιότητα τῶν ἰδεωδῶν, $ra \in I$ γιὰ κάθε $a \in \mathbb{Z}$, ἄρα $\langle r\rangle \overset{\text{ορ}}{=} r\mathbb{Z} \subseteq I$.
Ἀντιστρόφως, ἔστω $a \in I$. Ἐκτελώντας τὴν εὐκλείδεια διαίρεση a διὰ r ἔχομε $a = r\pi + \upsilon$, ὅπου $0 \le \upsilon < r$. Ἂν $\upsilon = 0$, τότε $a = r\pi \in r\mathbb{Z} = \langle r\rangle$ καὶ τελειώσαμε. Ἂν $\upsilon > 0$, τότε ἔχομε τὴν ἑξῆς κατάσταση, ἐκμεταλλευόμενοι τὶς δύο ἰδιότητες τῶν ἰδεωδῶν:

$$0 < \upsilon = \underbrace{\underbrace{a}_{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ I}} - \underbrace{r\pi}_{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ I}}}_{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ I}}.$$

Δηλαδή, σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση τὸ υ εἶναι θετικὸ στοιχεῖο τοῦ I μικρότερο ἀπὸ τὸ r, ποὺ ἔρχεται σὲ ἀντίφαση μὲ τὴν ἰδιότητα τοῦ r νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστο θετικὸ στοιχεῖο τοῦ I.

$\square$

Θεώρημα 2 *Ἂν τὸ K εἶναι σῶμα, τότε $K[X]$ εἶναι περιοχὴ κυρίων ἰδεωδῶν.*

Ἀπόδειξη (Παρατηρῆστε τὴ μεγάλη ἀναλογία αὐτῆς τῆς ἀπόδειξης μὲ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 1.)

Ἔστω I ἰδεῶδες τοῦ $K[X]$. Ἂν $I = \{0\}$, τότε $I = \langle 0\rangle$. Ἂν τὸ $I \neq \{0\}$ περιέχει ἕνα μὴ μηδενικὸ σταθερὸ πολυώνυμο c, τότε ἀπὸ τὴ δεύτερη ἰδιότητα τῶν ἰδεωδῶν, ἕπεται ὅτι $c \cdot c^{-1} \in I$, δηλαδὴ $1 \in I$. Ξανὰ ἀπὸ τὴ δεύτερη ἰδιότητα τῶν ἰδεωδῶν, ἕπεται ὅτι, γιὰ κάθε $f(X) \in K[X]$, ἰσχύει $1 \cdot f(X) \in I$. Ἄρα $I = K[X] = 1 \cdot K[X] = \langle 1\rangle$.

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ I δὲν περιέχει μὴ σταθερὰ πολυώνυμα ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδενικὸ καὶ ἔστω $r(X) \in I$ ἕνα μὴ μηδενικὸ πολυώνυμο τοῦ I μὲ ἐλάχιστο δυνατὸ βαθμό. Δηλαδή, κάθε ἄλλο μὴ μηδενικὸ πολυώνυμο τοῦ I ἔχει βαθμὸ $\geq \deg r(X)$. Ἀφοῦ τὸ $r(X)$ εἶναι μὴ σταθερό, ἕπεται ὅτι $\deg r(X) \geq 1$.

Θὰ ἀποδείξομε ὅτι $I = \langle r(X)\rangle$. Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἰδιότητα τῶν ἰδεωδῶν, $r(X)a(X) \in I$ γιὰ κάθε $a(X) \in K[X]$, ἄρα $\langle r(X)\rangle \overset{\text{ορ}}{=} r(X)\, K[X] \subseteq I$.
Ἀντιστρόφως, ἔστω $a(X) \in I$. Ἐκτελώντας τὴν εὐκλείδεια διαίρεση $a(X)$ διὰ $r(X)$ ἔχομε $a(X) = r(X)\pi(X) + \upsilon(X)$ καὶ τὸ $\upsilon(X)$ εἴτε εἶναι μηδενικό, εἴτε $\deg \upsilon(X) < \deg r(X)$. Ἂν

$\upsilon(X) = 0$, τότε $a(X) = r(X)\pi(X) \in r(X)K[X] = \langle r(X) \rangle$ καὶ τελειώσαμε. Ἄν $\upsilon(X) \neq 0$, τότε ἔχομε τὴν ἑξῆς κατάσταση, ἐκμεταλλευόμενοι τὶς δύο ἰδιότητες τῶν ἰδεωδῶν:

$$\upsilon(X) = \underbrace{\underbrace{a(X)}_{\substack{\Cap \\ I}} - \underbrace{r(X)\pi(X)}_{\substack{\Cap \\ I}}}_{\substack{\Cap \\ I}}.$$

Δηλαδή, σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση τὸ $\upsilon(X)$ εἶναι μὴ μηδενικὸ πολυώνυμο του I, βαθμοῦ μικρότερου ἀπὸ ἐκεῖνον τοῦ $r(X)$, ποὺ ἔρχεται σὲ ἀντίφαση μὲ τὸν τρόπο ἐπιλογῆς τοῦ $r(X)$.

$\square$