

ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ  
Έαρινό Έξάμηνο 2014-2015  
Καθηγητής Ν. Γ. Τζανάκης

**Θεμελιώδες θεώρημα τῶν πεπερασμένα παραγόμενων ἀβελιανῶν ομάδων.** (Ίσομορφικοί τύποι τῶν πεπερασμένα παραγόμενων ἀβελιανῶν ομάδων.)  
Ἐστω  $G$  πεπερασμένα παραγόμενη ἀβελιανή ομάδα.

1. Ἄν ἡ  $G$  εἶναι πεπερασμένη, τάξεως  $n$ , τότε ὑπάρχουν πρῶτοι  $p_1, \dots, p_k$ , ὄχι κατ' ἀνάγκη διαφορετικοί, καὶ φυσικοὶ ἀριθμοὶ  $r_1, \dots, r_k$ , τέτοιοι ὥστε

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}} \quad \text{καὶ} \quad p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} = n$$

2. Ἄν ἡ  $G$  εἶναι ἄπειρη, δίχως στοιχεῖα πεπερασμένης τάξεως, πλὴν τοῦ οὐδέτερου, τότε, γιὰ κάποιον φυσικὸ  $m$  ἰσχύει

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_m.$$

3. Ἄν ἡ  $G$  εἶναι ἄπειρη καὶ ἔχει στοιχεῖα πεπερασμένης τάξεως διαφορετικὰ ἀπὸ τὸ οὐδέτερο, τότε ὑπάρχουν πρῶτοι  $p_1, \dots, p_k$ , ὄχι κατ' ἀνάγκη διαφορετικοί, φυσικοὶ ἀριθμοὶ  $r_1, \dots, r_k$ , καθὼς καὶ φυσικὸς ἀριθμὸς  $m$ , τέτοιοι ὥστε

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_m.$$