Αλγεβρα ΙΙ

Ἐξεταστικὴ περίοδος Ἰουνίου 2015

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

11 Ἰουνίου 2015

1. Θεωροῦμε τὸ εὐθὺ γινόμενο $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{18}^*$ τῶν ὁμάδων $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ καὶ $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$. Τὴν πράξη τῆς ὁμάδας $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{18}^*$ συμβολίζομε προσθετικά. Ὑπολογῖστε τὸ στοιχεῖο $-2\,([10],[5])$. Ἡ ἀπάντησή σας θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $([a],[b])$, ὅπου a,b ἀκέραιοι μὲ $0 \le a,b \le 17$. μον. 0.5

2. Ἔστω ἡ *ὁμάδα τῶν τετρανίων (quaternions)*
$$Q = \langle a,b \mid a^4 = 1,\ a^2 = b^2 \neq 1,\ ba = a^3 b\rangle.$$
Θεωρῆστε δεδομένο ὅτι ἡ Q ἔχει τὰ ἑξῆς, ἀκριβῶς, στοιχεῖα: 1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b. Ἀποδεῖξτε ὅτι $H = \langle a^2\rangle$ εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς Q. Γιὰ ἁπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ, γιὰ κάθε $x \in Q$, νὰ γράφετε $\overline{x}$ ἀντὶ xH. Ὑπολογῖστε στοιχεῖα $x,y,z,w \in Q$ τέτοια ὥστε $Q/H = \{\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{w}\}$ καὶ κατασκευᾶστε τὸν πίνακα τῆς πράξης τῆς Q/H. (Προσοχή! Κάθε τετραγωνάκι τοῦ πίνακα πρέπει νὰ περιέχει κάποιο ἀπὸ τὰ $\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{w}$.) Εἶναι ἡ Q/H ἀβελιανή; Εἶναι ἡ Q/H κυκλική; Αἰτιολογῆστε τὶς ἀπαντήσεις σας ἁπλῶς παρατηρώντας τὸν πίνακα. μον. 1

3. (α′) Γρᾶψτε ὅλους τοὺς ἰσομορφικοὺς τύπους τῶν ἀβελιανῶν ὁμάδων τάξεως 72. μον. 0.25
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν μία ὁμάδα περιέχει ἕνα στοιχεῖο τάξεως n καὶ ὁ d εἶναι θετικὸς διαιρέτης τοῦ n, τότε ἡ ὁμάδα περιέχει στοιχεῖο τάξεως n/d. μον. 0.25
(γ′) Ἔστω ἀβελιανὴ ὁμάδα G, τάξεως 72, ἡ ὁποία περιέχει στοιχεῖο τάξεως 36 καὶ δὲν περιέχει στοιχεῖο τάξεως 8. Ποιὸς εἶναι ὁ ἰσομορφικὸς τῦπο τῆς G; Συνιστᾶται νὰ χρησιμοποιήσετε τὰ προηγούμενα ἐρωτήματα. μον. 1

4. Ἔστω M_n ὁ δακτύλιος τῶν $n \times n$ πραγματικῶν πινάκων καὶ M_n^* ἡ πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα τῶν μονάδων τοῦ M_n.
(α′) Περιγρᾶψτε τὴν M_n^*, δίνοντας ἕνα κριτήριο γιὰ τὸ πότε ἕνας $n \times n$ πραγματικὸς πίνακας ἀνήκει στὴ M_n^*. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $\det : M_n^* \to \mathbb{R}^*$ εἶναι ἐπιμορφισμὸς ὁμάδων. μον. 0.5
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σύνολο U_n τῶν $n \times n$ πραγματικῶν πινάκων ὀρίζουσας 1 εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς M_n^*. Διατυπῶστε τὸ Θεμελιῶδες Θεώρημα Ἰσομορφισμοῦ Ὁμάδων καὶ ἀποδεῖξτε, *ἀποκλειστικὰ μὲ τὴ βοήθεια αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος*, ὅτι $M_n^*/U_n \cong \mathbb{R}^*$. μον. 1
(γ′) Γιὰ δύο πίνακες $A, B \in M_n^*$, τί σημαίνει ἡ ἰσότητα τῶν κλάσεων $A\,U_n = B\,U_n$; μον. 0.5

5. Ἔστω ἡ ἀκέραια περιοχὴ $D = \{a + bi\sqrt{6} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $D^* = \{\pm 1\}$ καὶ ὅτι τὸ $2 + i\sqrt{6}$ εἶναι ἀνάγωγο στοιχεῖο τῆς D. μον. 0.5
(β′) Βοηθούμενοι ἀπὸ τὴ σχέση $2 \cdot 5 = (1 + i\sqrt{6})(1 - i\sqrt{6})$, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $2 + i\sqrt{6}$ δὲν εἶναι πρῶτο στοιχεῖο τῆς D. μον. 0.5

6. (α′) Ἔστω δακτύλιος R μὲ μοναδιαῖο καὶ I ἰδεῶδες τοῦ R. Ἀποδεῖξτε ὅτι $I = R$, ἂν καὶ μόνο ἄν, τὸ I περιέχει κάποια μονάδα τοῦ R. μον. 0.5
(β′) Στὸν δακτύλιο $\mathbb{Z}[X]$, ἀποδεῖξτε ὅτι $\langle X, X + 2\rangle \neq \mathbb{Z}[X]$. Ἀποδεῖξτε, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πρώτου ἰδεώδους, καὶ μόνο, ὅτι τὸ ἰδεῶδες $\langle X\rangle$ εἶναι πρῶτο. Τὸ ἴδιο ἰδεῶδες, ἀποδεῖξτε ὅτι δὲν εἶναι μεγιστικό (maximal). μον. 1
(γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ δακτύλιος $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 - 2\rangle$ εἶναι σῶμα. Δεῖξτε, ἀκόμη, ὅτι $(X + \langle X^3 - 2\rangle)^3 = -2 + \langle X^3 - 2\rangle$ καὶ ὑπολογῖστε τὸ $(X + \langle X^3 - 2\rangle)^{-1}$. μον. 1

7. Σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς περιπτώσεις $D = \mathbb{Z}$, $D = \mathbb{Q}$ καὶ $D = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, θεωρῆστε τὸ πολυώνυμο $f(X) = (2X^2 + 4)(10X^2 - 30) \in D[X]$ καὶ ἀναλῦστε τὸ $f(X)$ σὲ γινόμενο τῆς μορφῆς
$$f(X) = \epsilon \cdot g_1(X) \cdot g_2(X) \cdots ,$$
ὅπου, $\epsilon \in D^*$, καθένα ἀπὸ τὰ $g_i(X)$ (ὄχι κατ' ἀνάγκη διαφορετικὰ μεταξύ τους) εἶναι ἀνάγωγο στοιχεῖο τῆς $D[X]$ καί, στὴν περίπτωση, ποὺ κάποιο $g_i(X)$ εἶναι μὴ σταθερὸ πολυώνυμο, ὁ συντελεστὴς τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου του εἶναι 1. Ἡ ἀπάντησή σας πρέπει νὰ εἶναι διατυπωμένη στὴ μορφὴ $\epsilon = \ldots$, $g_1(X) = \ldots$, $g_2(X) = \ldots$ μὲ μικρὲς ἐπεξηγήσεις γιατὶ εἶναι ἀνάγωγα τῆς $D[X]$ τὰ $g_i(X)$, ποὺ θὰ βρεῖτε.
Γιὰ τὴν ἀκέραια περιοχὴ $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ θεωρῆστε δεδομένα τὰ ἑξῆς: Εἶναι εὐκλείδεια περιοχὴ καὶ περιοχὴ ἀνάλυσης, μονάδες της εἶναι μόνο οἱ ± 1 καὶ τὰ $i\sqrt{2}$ καὶ 5 εἶναι πρῶτα στοιχεῖα της. μον. 1

8. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $f(X, Y) = X^2Y^2 + (X^2 - 1)^3(X^2 + 1) \in \mathbb{C}[X, Y]$ εἶναι ἀνάγωγο στοιχεῖο τῆς ἀκέραιας περιοχῆς $\mathbb{C}[X, Y]$. Ἡ ἀπόδειξή σας νὰ εἶναι σύντομη, ἀλλὰ σχολαστικὰ διατυπωμένη. μον. 1

Ὁδηγίες

• Ἐπιτρέπεται νὰ συμβουλεύεστε τὶς σημειώσεις **μου**. Ἀπαγορεύεται νὰ ἔχετε γράψει ὁποιοδήποτε σχόλιο σὲ αὐτές. Ἡ παραβίαση αὐτοῦ τοῦ κανόνα συνεπάγεται μηδενισμὸ τοῦ γραπτοῦ σας.
• Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε ἀναπόδεικτη ὁποιαδήποτε πρόταση τῶν σημειώσεών **μου**, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι θὰ τὴν προσδιορίσετε σαφῶς, μὲ τὴν ἀρίθμησή της καὶ θὰ δείξετε ὅτι, στὴ συγκεκριμένη ἐφαρμογὴ ποὺ θὰ κάνετε, πληροῦνται οἱ ὑποθέσεις τῆς πρότασης.
• Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε ἀναπόδεικτη ὁποιαδήποτε πρόταση τῶν βιβλίων, ποὺ προτείνονται στὴν ἰστοσελίδα τοῦ μαθήματος, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι θὰ τὴν διατυπώσετε στὴ γενικὴ μορφή της καὶ θὰ δείξετε ὅτι, στὴ συγκεκριμένη ἐφαρμογὴ ποὺ θὰ κάνετε, πληροῦνται οἱ ὑποθέσεις τῆς πρότασης.

Βαθμολογία

Σύνολο μονάδων 10.5 . Ἡ βαθμολογία προκύπτει ὡς ἑξῆς: Ἔστω B_1 ἡ βαθμολογία, ποὺ συγκεντρώνετε ἀπὸ τὰ θέματα 1-4 καὶ B_2 ἡ βαθμολογία, ποὺ συγκεντρώνετε ἀπὸ τὰ θέματα 5-8. Τότε ὁ βαθμός σας εἶναι
$$B_1 + B_2 - \max\{2.5 - B_1, 0\} - \max\{2.5 - B_2, 0\}.$$
Αὐτὸ συνεπάγεται ὅτι, γιὰ νὰ πάρετε τὴ βάση (5), πρέπει $B_1 \geq 2.5$ καὶ $B_2 \geq 2.5$.

Καλὴ ἐπιτυχία!