ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ II
Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2014-2015
Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

1. Σ' αὐτὴ τὴν ἄσκηση οἱ μεταθέσεις εἶναι στοιχεῖα τῆς S_7. Θεωρῆστε τοὺς κύκλους $\sigma_1 = (1\,4\,3\,2\,5\,7)$ $\tau_1 = (7\,5\,6\,1\,2\,4\,3)$ καθὼς καὶ τοὺς $\sigma_2 = (1\,4\,3\,2\,5)$ $\tau_2 = (7\,5\,6\,2\,4\,3)$ καὶ ἀναλῦστε καθένα ἀπὸ τὰ γινόμενα $\sigma_1\tau_1, \tau_1\sigma_1, \sigma_2\tau_2$ καὶ $\tau_2\sigma_2$ σὲ γινόμενο *ξένων* κύκλων.
Ἀπάντηση: $\sigma_1\tau_1 = (1\,5\,6\,4\,2\,3)$, $\tau_1\sigma_1 = (1\,3\,4\,7\,2\,6)$, $\sigma_2\tau_2 = (1\,4\,2\,3\,7)(5\,6)$, $\tau_2\sigma_2 = (1\,3\,4\,7\,5)(2\,6)$.

2. Σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις ὑπολογῖστε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δράσης τῆς μετάθεσης σ_i στὸ πολυώνυμο f_i, δηλαδή, ὑπολογῖστε αὐτὸ ποὺ στὸ μάθημα συμβολίσαμε $f_i^{\sigma_i}$.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2^3 + x_3x_2^2 - 3x_1x_3^3, \quad \sigma_1 = (x_1\, x_3) \in S_3.$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4), \quad \sigma_2 = (x_2\, x_3) \in S_4$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \sigma_3 = (x_1\, x_3)(x_2\, x_4) \in S_4$$
$$f_4(a, b, c, d) = ab^2c^3 + bc^2d^3 + 4abcd, \quad \sigma_4 = (1\,2\,3\,4) \in S_4$$
$$f_5(a, b, c, d) = f_4(a, b, c, d), \quad \sigma_5 = (1\,4) \in S_4$$
$$f_6(a, b, c, d) = f_4(a, b, c, d), \quad \sigma_6 = (1\,2)(3\,4) \in S_4.$$

Ἀπάντηση: $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\sigma_1} = x_3^2 - 3x_3x_2^3 + x_1x_2^2 - 3x_3x_1^3$,
$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\sigma_2} = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)$, $f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\sigma_3} = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$,
$f_4(a, b, c, d)^{\sigma_4} = bc^2d^3 + cd^2a^3 + 4bcda$, $f_5(a, b, c, d)^{\sigma_5} = db^2c^3 + bc^2a^3 + 4bcda$,
$f_6(a, b, c, d)^{\sigma_6} = ba^2d^3 + ad^2c^3 + 4bcda$.

3. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $2 \leq k \leq n$, τότε ἡ μετάθεση $(a_1\, a_2\, \ldots a_k) \in S_n$ εἶναι ἄρτια ἂν ὁ k εἶναι περιττός καὶ περιττὴ ἂν ὁ k εἶναι ἄρτιος. (Ὁ n δὲν παίζει ρόλο, ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\geq k$.)
Ὑπόδειξη: Γρᾶψτε τὴ μετάθεση ὡς γινόμενο ἀντιμεταθέσεων.

4. Γιὰ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω μεταθέσεις ὑπολογῖστε ἂν εἶναι ἄρτια ἢ περιττή:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Ἀπάντηση: Οἱ μεταθέσεις σ_1 καὶ σ_3 εἶναι περιττές· οἱ ἄλλες δύο εἶναι ἄρτιες.

5. Ἕνα πολυώνυμο $f(x_1, \ldots, x_n)$ λέγεται *συμμετρικὸ* ἄν, γιὰ κάθε μετάθεση $\sigma \in S_n$ ἰσχύει $f(x_1, \ldots, x_n)^\sigma = f(x_1, \ldots, x_n)$.
Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πολυώνυμο
$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2$$
εἶναι συμμετρικό.
Ὑπόδειξη: Παρατηρῆστε ὅτι $D(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, \ldots, x_n)^2$, ὅπου τὸ πολυώνυμο $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ ὁρίσθηκε στὸ μάθημα. Ἐπίσης, θυμηθῆτε ὅτι κάθε μετάθεση εἶναι γινόμενο ἀντιματαθέσεων.

6. Ἔστω $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ τὸ εὐθὺ γινόμενο τῶν ὁμάδων $(\mathbb{Q}, +)$ καὶ $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Τὴν πράξη τῆς ὁμάδας $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ συμβολίζομε πολλαπλασιαστικά. Ὑπολογῖστε τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:
$$a = \left(\frac{5}{7}, \frac{5}{7}\right)^2, \quad b = \left(\frac{1}{3}, \frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{3}\right), \quad c = \left(\frac{1}{3}, \frac{6}{5}\right)^{-1}.$$
Ἀπαντήσεις: $a = \left(\frac{10}{7}, \frac{25}{49}\right)$, $b = \left(\frac{23}{15}, \frac{2}{5}\right)$, $c = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$.

7. Ἀπαντήσεις: $a = ([14], [13])$, $b = ([11], [13]$, $c = ([12], [17])$, $d = ([8], [11])$.

8. Ἔστω $(G, +)$ ἡ ὁμάδα τῶν 2×2 πινάκων μὲ στοιχεῖα ἀκεραίους, $(G^*, \cdot)$ ἡ ὁμάδα τῶν ἀντιστρεψίμων 2×2 πινάκων μὲ στοιχεῖα ἀκεραίους καὶ $G \times G^*$ τὸ εὐθὺ γινόμενό τους. Τὴν πράξη τῆς $G \times G^*$ συμβολίζομε πολλαπλασιαστικά. Ἔστω
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Ὑπολογῖστε τὰ ἑξῆς στοιχεῖα τῆς $G \times G^*$:
$$(A, A)^2, \quad (A, A)^{-1}, \quad (B, C) \cdot (C, A), \quad D = ((B, C) \cdot (C, A))^{-1}.$$
Ἀπαντήσεις: $(A, A)^2 = \left(\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\right)$, $(A, A)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$,
$(B, C) \cdot (C, A) = \left(\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & 30 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{pmatrix} -7 & -15 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 4 & -17 \end{pmatrix}\right)$.

9. Ἔστω ἡ *ὁμάδα τῶν τεσσάρων τοῦ Klein* (ἡ πράξη της συμβολίζεται πολλαπλασιστικά)
$$V = \langle a, b \mid a^2 = 1 = b^2,\ ab = ba \rangle.$$
Συμπληρῶστε τὸν πίνακα

$\cdot$	1	a	b	ab
1				
a				
b				
ab				

Στὴ συνέχεια, γιὰ κάθε $x \in V$ θεωρῆστε τὴ μετάθεση

$$L_x = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ x & xa & xb & xab \end{pmatrix}.$$

Ἀριθμῆστε τὰ στοιχεῖα $1, a, b, ab$ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς $1, 2, 3, 4$ καὶ γρᾶψτε κάθε μία ἀπὸ τὶς μεταθέσεις L_1, L_a, L_b, L_{ab} ὡς μετάθεση τῶν ἀριθμῶν $1, 2, 3, 4$. Προφανῶς, οἱ τέσσερις μεταθέσεις ἀποτελοῦν ὑποομάδα, ἔστω G, τῆς S_4. Δεῖξτε ὅτι ἡ G εἶναι ὑποομάδα καὶ τῆς A_4. Συμπληρῶστε τὸν πίνακα τῆς G:

$\cdot$	L_1	L_a	L_b	L_{ab}
L_1				
L_a				
L_b				
L_{ab}				

Παρατηρῆστε ὅτι ὁ πίνακας τῆς G εἶναι "ἴδιος" μὲ τὸν πίνακα τῆς V, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι, ἂν στὸν πίνακα τῆς G, στὴ θέση καθενὸς L_x βάλομε τὸ x, τότε παίρνομε τὸν πίνακα τῆς V. Τί συμπεραίνετε ἀπὸ αὐτό;

Μερικὴ ἀπάντηση: $L_1 = \mathrm{id}$, $L_a = (1\,2)(3\,4)$, $L_b = (1\,3)(2\,4)$, $L_{ab} = (1\,4)(2\,3)$. Τὸ συμπέρασμα ἀπὸ τὴ σύγκριση τῶν πινάκων εἶναι ὅτι οἱ ὁμάδες G καὶ V εἶναι ἰσόμορφες.

10. Ἐπαναλάβετε τὴν προηγούμενη ἄσκηση, ἀλλὰ τώρα, ἀντὶ τῆς V θὰ ἔχετε τὴν *ὁμάδα τῶν τετρανίων (quaternions)*

$$Q = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ a^2 = b^2 \neq 1,\ ba = a^3 b \rangle.$$

Στὸν πίνακα τῆς Q θὰ γράψετε τὰ στοιχεῖα της μὲ τὴν ἑξῆς σειρά:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b,\ ab,\ a^2b,\ a^3b.$$

Ὕστερα, ἀκριβῶς ὅπως καὶ στὴν προηγούμενη ἄσκηση, γιὰ κάθε $x \in Q$, θὰ θεωρήσετε τὴ μετάθεση L_x, ἡ ὁποία τώρα εἶναι μετάθεση 8 στοιχείων:

$$L_x = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & b & ab & a^2b & a^3b \\ 1 & xa & xa^2 & xa^3 & xb & xab & xa^2b & xa^3b \end{pmatrix}.$$

Θὰ ἀντιστοιχήσετε στὰ στοιχεῖα τῆς Q, μὲ τὴ σειρὰ ποὺ εἶναι γραμμένα παραπάνω, τοὺς ἀριθμοὺς $1, \dots, 8$ καὶ θὰ γράψετε κάθε L_x ὡς μετάθεση τῶν ἀριθμῶν $1, \dots, 8$. Ἔτσι θὰ πάρετε μία ὑποομάδα G τῆς S_8. Θὰ φτιάξετε τὸν πίνακα τῆς G γράφοντας τὰ στοιχεῖα μὲ τὴ σειρά L_1, L_a, L_{a^2}, L_{a^3}, L_b, L_{ab}, L_{a^2b}, L_{a^3b} καὶ θὰ συγκρίνετε τοὺς πίνακες πράξεων τῶν G καὶ Q.

11. Ἔστω G πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα καὶ H ὑποομάδα της. Ἀποδεῖξτε ὅτι $hH = H = Hh$ γιὰ κάθε $h \in H$. Μετὰ ἀποδεῖξτε ὅτι, ἄν $g_1, g_2 \in G$, τότε οἱ παρακάτω συνθῆκες εἶναι ἰσοδύναμες:

(α′) $g_2H = g_1H$
(β′) $g_2^{-1}g_1 \in H$
(γ′) $g_1^{-1}g_2 \in H$
(δ′) $g_2 \in g_1H$
Ὑπόδειξη: Ἡ ἀπόδειξη ἀκολουθεῖ τὸ ἑξῆς σχῆμα: (α′) ⇒ (β′)⇒ (γ′) ⇒ (δ′)⇒ (α′).
Ἀνάλογα καὶ γιὰ τὰ δεξιὰ σύμπλοκα: Οἱ παρακάτω συνθῆκες εἶναι ἰσοδύναμες:
(α′) $Hg_2 = Hg_1$
(β′) $g_2g_1^{-1} \in H$
(γ′) $g_1g_2^{-1} \in H$
(δ′) $g_2 \in Hg_1$

12. Ἡ 8-η διεδρικὴ ὁμάδα ἢ ὁμάδα συμμετριῶν τοῦ κανονικοῦ 8-γώνου ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$D_8 = \langle s, r \,|\, r^8 = 1 = s^2, rs = sr^7 \rangle.$$

(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε ἀκέραιο k ἰσχύει $r^k s = sr^{8-k} = sr^{-k}$. Ἐπίσης, ἀποδεῖξτε ὅτι $D_8 = \{1, r, r^2, \ldots, r^7, s, sr, sr^2, \ldots, sr^7\}$, ἄρα $|D_8| = 16$. Μὲ ποιὸ στοιχεῖο τῆς μορφῆς $s^i r^j$, $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ εἶναι ἴσο τὸ $r^2sr^3sr^5sr^7$;
(β′) Ὑπολογῖστε τὰ δεξιὰ καὶ τὰ ἀριστερὰ σύμπλοκα τῆς ὑποομάδας $N = \langle r^4 \rangle$ καὶ δεῖξτε ὅτι $N \triangleleft D_8$ (N εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς D_8).
(γ′) Ἔστω $H = \langle s, r^4 \rangle$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $H = \{1, s, r^4, sr^4\}$. Ὑπολογῖστε τὰ δεξιὰ καὶ τὰ ἀριστερὰ σύμπλοκα τῆς H καὶ δεῖξτε ὅτι ἡ H δὲν εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς D_8).

13. Ἔστω ἡ ὁμάδα $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ (ἡ πράξη της συμβολίζεται μὲ πρόσθεση) καὶ ἡ ὑποομάδα της $H = \langle([0]_2, [2]_4)\rangle$. Ὑπολογῖστε τὰ ἀριστερὰ σύμπλοκα τῆς H. Γιατὶ ἡ H εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$; (Ἄρα, τὰ δεξιὰ σύμπλοκα συμπίπτουν μὲ τὰ ἀριστερά.)

14. Ἔστω ὁμάδα G καὶ ὑποομάδα της H, τῆς ὁποίας ὁ δείκτης στὴ G εἶναι 2 (δηλαδή, συμβολικά, $[G : H] = 2$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $H \triangleleft G$ (H εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς G).

15. Στὸ διάστημα $[0, 1)$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν θεωρῆστε τὴν ἑξῆς πρόσθεση: $x_1 \oplus x_2 =$ δεκαδικὸ μέρος τοῦ $(x_1 + x_2)$. Γιὰ παράδειγμα,

$$0.3 \oplus 0.4 = 0.7, \quad 0.3 \oplus 0.7 = 0, \quad 0.3 \oplus 0.8 = 0.1.$$

(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, μὲ τὴν πράξη αὐτή, τὸ $[0, 1)$ γίνεται ὁμάδα, τὴν ὁποία συμβολῖστε μὲ I.
(β′) Θεωρῆστε τὴν ὁμάδα-πηλῖκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ καὶ τὴν ἀντιστοιχία

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni x + \mathbb{Z} \overset{f}{\mapsto} (\text{δεκαδικὸ μέρος τοῦ } x) \in I.$$

(β′.1) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ f εἶναι μία καλῶς ὁρισμένη ἀπεικόνιση.
(β′.2) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση f εἶναι ἰσομορφισμὸς ὁμάδων.

(γ′) Δεῖξτε ὅτι $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : 0 \leq x < 1\}$.
(δ′) Γιὰ ἁπλοποίηση τοῦ συμβολισμοῦ, ἂς θέσομε $\overline{x} = x + \mathbb{Z}$. Ὑπολογῖστε εἶναι τὰ ἀποτελέσματα τῶν παρακάτω πράξεων στὴν ὁμάδα $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ μὲ τὴ μορφὴ $\overline{x}$, ὅπου $0 \leq x < 1$:

$$\overline{0.14} + \overline{0.80}, \quad \overline{0.14} + \overline{0.96}, \quad -\overline{0.14}, \quad \overline{0.14} - \overline{0.11}, \quad \overline{0.14} - \overline{0.15}.$$

Ἀπαντήσεις στὸ (δ′): $\overline{0.94}$, $\overline{0.1}$, $\overline{0.86}$, $\overline{0.03}$, $\overline{0.99}$.

16. Ἔστω M_n^* ἡ πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα τῶν $n \times n$ πινάκων πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ U_n τὸ ὑποσύνολο τοῦ M_n^*, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐκείνους τοὺς $n \times n$ πίνακες πραγματικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ ὁρίζουσα ἰσοῦται μὲ 1.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $U_n < M_n^*$.
(β′) Θεωρῆστε τὴν πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα $\mathbb{R}^*$ τῶν μὴ μηδενικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $\det : U_n^* \to \mathbb{R}^*$, ποὺ στέλνει κάθε πίνακα $A \in U_n^*$ στὴν ὁρίζουσά του $\det(A)$, εἶναι ἐπιμορφισμὸς ὁμάδων, τῆς ὁποίας ὁ πυρήνας ἰσοῦται μὲ U_n.
(γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $U_n \lhd M_n^*$ καὶ $M_n^*/U_n \cong \mathbb{R}^*$. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι ἡ ὁμάδα M_n^*/U_n εἶναι ἀβελιανή, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ M_n^* δὲν εἶναι ἀβελιανή. Ἐξηγῆστε γιατὶ δὲν εἶναι παράλογο νὰ ἰσχύει $AB \neq BA$, ἐνῶ $AU_n \cdot BU_n = BU_n \cdot AU_n$.

17. Ἔστω ἀκέραιος $n > 1$. Θεωρῆστε τὴν προσθετικὴ ὁμάδα $\mathbb{Z}$ καὶ τὴν ὑποομάδα της $n\mathbb{Z}$ (τὰ πολλαπλάσια τοῦ n). Θεωρῆστε῾ ἐπίσης τὴν προσθετικὴ ὁμάδα $\mathbb{Z}_n$ καὶ τὴν ἀπεικόνιση $\mathbb{Z} \ni a \overset{f}{\mapsto} [a] \in \mathbb{Z}_n$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ f εἶναι ἐπιμορφισμὸς ὁμάδων μὲ $\ker f = n\mathbb{Z}$. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

18. Ἔστω ἡ ὁμάδα D_8, ποὺ ὁρίσθηκε στὴν ἄσκηση 12.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $N = \langle r^4 \rangle$ εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς D_8 καὶ

$$D_8/N = \{N,\ rN,\ r^2N,\ r^3N,\ sN,\ srN,\ sr^2N,\ sr^3N\}$$

(β′) Χρησιμοποιώντας τὴ σχέση $r^k s = sr^{8-k} = sr^{-k}$ (βλ. ἄσκηση 12 α′) δεῖξτε ὅτι τὰ στοιχεῖα $r^2N, sN, srN, sr^2N, sr^3N$ ἔχουν τάξη 2, ἐνῶ τὰ rN, r^3N ἔχουν τάξη 4.
(γ′) Μὲ βάση τὰ προηγούμενα ἐρωτήματα ἀποδεῖξτε ὅτι

$$D_8/N = \langle\ rN,\ sN\ :\ (rN)^4 = N = (sN)^2,\ (rN)^3(sN) = (sN)(rN)\ \rangle$$

Συμπεράνατε ὅτι $D_8/N \cong D_4$, ὅπου D_4 εἶναι ἡ 4-η διεδρικὴ ὁμάδα, ἢ *ὁμάδα τῶν συμμετριῶν του τετραγώνου*:

$$D_4 = \langle a, b : a^4 = 1 = b^2,\ a^3b = ba \rangle.$$

(δ′) Γιὰ νὰ δεῖτε πιὸ συγκεκριμένα τὸν ἰσομορφισμὸ $D_8/N \cong D_4$ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, κάνετε τὰ ἑξῆς: Συμπληρῶστε τὸν παρακάτω πίνακα τῆς πράξης τῆς ὁμάδας D_4:

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ba	ba^2	ba^3
1								
a								
a^2								
a^3								
b								
ba								
ba^2								
ba^3								

Συμπληρῶστε τὸν παρακάτω πίνακα τῆς πράξης τῆς ὁμάδας D_8/N:

$\cdot$	N	rN	r^2N	r^3N	sN	srN	sr^2N	sr^3N
N								
rN								
r^2N								
r^3N								
sN								
srN								
sr^2N								
sr^3N								

Μετὰ ποὺ θὰ συμπληρώσετε τὸν δεύτερο πίνακα, θέσετε ὅπου N τὸ 1, ὅπου rN τὸ a (ἄρα $r^iN = a^i$) καὶ ὅπου sN τὸ b (ἄρα $sr^iN = ba^i$) καὶ διαπιστῶστε ὅτι ὁ δεύτερος πίνακας θὰ μετατραπεῖ σὲ πίνακα πανομοιότυπο μὲ τὸν πρῶτο.

19. Στὴν πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα $\mathbb{Z}_{18}^*$ (ἀντιστρέψιμες κλάσεις mod 18) ὑπολογῖστε τὶς δυνάμεις τῆς [5] καὶ διαπιστῶστε ὅτι ἡ $\mathbb{Z}_{18}^*$ εἶναι κυκλική. Ἀποδεῖξτε ὅτι αὐτὴ ἡ ὁμάδα εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν προσθετικὴ ὁμάδα $\mathbb{Z}_6$. Βρεῖτε ἕναν ἰσομορφισμὸ μεταξὺ τῶν $\mathbb{Z}_6$ καὶ $\mathbb{Z}_{18}^*$.

    Μερικὴ ἀπάντηση: Ἕνας ἰσομορφισμὸς $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{18}^*$ εἶναι αὐτὸς ποὺ στέλνει ἕνα γεννήτορα τῆς $\mathbb{Z}_6$ σ' ἕνα γεννήτορα τῆς $\mathbb{Z}_{18}^*$, ἄρα μποροῦμε νὰ ὁρίσομε τὸν f ἀπὸ τὴ σχέση $f(k[1]_6) = [5]_{18}^k$.

20. Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathbb{Z}_{15}^* = \langle [7], [-1] \rangle$. Ποιὰ εἶναι ἡ τάξη τῆς ὁμάδας $\mathbb{Z}_{15}^*$ καὶ τῶν γεννητόρων της [7] καὶ $[-1]$; Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ $\mathbb{Z}_{15}^*$ δὲν εἶναι κυκλική (σὲ ἀντίθεση μὲ τὴν $\mathbb{Z}_{18}^*$· ἄσκηση 19).

21. Ἔστω ἡ πολλαπλασιαστικὴ ἀβελιανὴ ὁμάδα $G = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1\rangle$ καὶ ἡ προσθετικὴ ἀβελιανὴ ὁμάδα $G' = \langle c, d : 4c = 2d = 0\rangle$. Ἀποδεῖξτε ὅτι

$$G = \{a^i b^j : 0 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 1\} \quad \text{καὶ} \quad G' = \{ic + jd : 0 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 1\}.$$

Βρεῖτε ἕναν ἰσομορφισμὸ $f : G \to G'$.

22. Ὑπολογῖστε δύο στοιχεῖα τῆς ὁμάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, ποὺ παράγουν αὐτὴ τὴν ὁμάδα, τὸ ἕνα ἔχει τάξη 4 καὶ τὸ ἄλλο ἔχει τάξη 2. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ὁμάδα $\mathbb{Z}_{20}^*$ δὲν εἶναι κυκλική. Συνδυάζοντας κατόπιν τὰ δύο παραπάνω, ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathbb{Z}_{20}^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ καὶ ὑπολογῖστε ἕναν ἰσομορφισμὸ $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{20}^*$.

23. Ἀποδεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει μονομορφισμὸς ὁμάδων $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{50}$. Ἐπίσης, δὲν ὑπάρχει μονομορφισμὸς ὁμάδων $\mathbb{Z}_{20}^* \to \mathbb{Z}_{20}$.

24. (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε ἀβελιανὴ ὁμάδα τάξεως 180 εἶναι ἰσόμορφη μὲ μία ἀπὸ τὶς παρακάτω ὁμάδες:

$$A_1 = \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5, \quad A_2 = \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5, \quad A_3 = \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5, \quad A_4 = \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5.$$

(β′) Δεῖξτε ὅτι $A_1 \cong \mathbb{Z}_{180}$ καί, συνεπῶς, ἡ A_1 εἶναι κυκλική.
(γ′) Δεῖξτε ὅτι, οὔτε ἡ A_2, οὔτε ἡ A_4 ἔχουν στοιχεῖο τάξεως 12.
(δ′) Δεῖξτε ὅτι, στὴν ὁμάδα A_3, τὸ στοιχεῖο $([1]_4, [1]_3, [0]_3, [0]_5)$ ἔχει τάξη 12.
(ε′) Ἔστω $(G, \cdot)$ ἀβελιανὴ ὁμάδα τάξεως 180, ἡ ὁποία δὲν εἶναι κυκλικὴ καὶ ἔχει στοιχεῖο τάξεως 12. Βάσει τῶν παραπάνω, ἀποδεῖξτε ὅτι $G \cong A_3$. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι ὑπάρχουν $a, b, c, d \in G$ μὲ τάξεις $4, 3, 3, 5$, ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα παράγουν τὴ G. Πιὸ συγκεκριμμένα, κάθε $g \in G$ εἶναι τῆς μορφῆς

$$g = a^{\nu_1} b^{\nu_2} c^{\nu_3} d^{\nu_4}, \quad 0 \leq \nu_1 \leq 3,\ 0 \leq \nu_2, \nu_3 \leq 2,\ 0 \leq \nu_4 \leq 4.$$

Ἐπιπλέον, ἂν $a^{\nu_1} b^{\nu_2} c^{\nu_3} d^{\nu_4} = 1$, τότε $\nu_1 \equiv 0 \pmod 4$, $\nu_2 \equiv \nu_3 \equiv 0 \pmod 3$, $\nu_4 \equiv 0 \pmod 5$.

25. Ἔστω ὅτι $p_1, \ldots, p_k$ εἶναι πρῶτοι, ὄχι ὑποχρεωτικὰ διαφορετικοί, καὶ $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$. Γιὰ $i = 1, \ldots, k$ θέτομε $q_i = p_i^{r_i}$. Ἔστω ὅτι $G \cong \mathbb{Z}_{q_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_k}$, ὅπου G εἶναι πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν $a_1, \ldots, a_k \in G$, μὲ τάξεις $q_1, \ldots, q_k$, ἀντιστοίχως, τέτοια ὥστε $G = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$, δηλαδή, κάθε $g \in G$ γράφεται μὲ τὴ μορφὴ $g = a_1^{\nu_1} \cdots a_m^{\nu_k}$. Ἐπιπλέον, ἂν $a_1^{\nu_1} \cdots a_k^{\nu_k} = 1$, τότε, ὑποχρεωτικά, $a_1 \equiv 0 \pmod{q_1}, \ldots, a_k \equiv 0 \pmod{q_k}$.
Σημείωση. Ἡ ἄσκηση αὐτὴ ἁπλῶς γενικεύει τὴ μέθοδο τῆς 24 (ε′).

26. (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ὁμάδα $\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{m}$ δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει λιγώτερους ἀπὸ m γεννήτορες. (Φυσικά, ἡ ὁμάδα αὐτὴ ἔχει m γεννήτορες, τὰ στοιχεῖα $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $(0, 0, \ldots, 1)$.)
(β′) Ἔστω ὅτι ἡ πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα G εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν ὁμάδα τοῦ

ἐρωτήματος (α′). Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν $a_1, \ldots, a_m \in G$, μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες: $G = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, δηλαδή, κάθε $g \in G$ γράφεται μὲ τὴ μορφὴ $g = a_1^{\nu_1} \cdots a_m^{\nu_m}$. Ἐπιπλέον, ἂν $a_1^{\nu_1} \cdots a_m^{\nu_m} = 1$, τότε, ὑποχρεωτικά, $\nu_1 = \ldots = \nu_m = 0$. Τέλος, ἡ G δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχει λιγώτερους ἀπὸ m γεννήτορες.

27. Ἂν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς $m > 1$ εἶναι ἐλεύθερος τετραγώνου, δηλαδή, δὲν ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς $d > 1$, τέτοιος ὥστε $d^2 | m$, τότε ἡ G εἶναι κυκλική. Συνέπεια αὐτοῦ εἶναι ὅτι, ἂν μία ἀβελιανὴ ὁμάδα ἔχει τάξη, γιὰ παράδειγμα, $n \in \{10, 15, 22, 30, 42\}$, τότε ἡ ὁμάδα εἶναι κυκλική.
Ὑπόδειξη: Ὑποθέστε ὅτι ἡ G εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν ὁμάδα $\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}$, ὅπου $p_1, \ldots, p_k$ εἶναι πρῶτοι, ὄχι ὑποχρεωτικὰ διαφορετικοί, καὶ $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$. Βάσει τῆς ὑποθέσεως γιὰ τὸ m δεῖξτε ὅτι $r_1 = \ldots = r_k = 1$ καὶ οἱ πρῶτοι $p_1, \ldots, p_k$ εἶναι διαφορετικοί. Χρησιμοποιεῖστε μετὰ τὸ θεώρημα, ποὺ λέει ὅτι, $\mathbb{Z}_\mu \times \mathbb{Z}_\nu \cong \mathbb{Z}_{\mu\nu} \Leftrightarrow (\mu, \nu) = 1$.

28. Ἔστω ἀβελιανὴ ὁμάδα G. Τότε, γιὰ κάθε θετικὸ διαιρέτη m τῆς $|G|$ ὑπάρχει ὑποομάδα τῆς G, ποὺ ἔχει τάξη m.
Ὑπόδειξη: Ὑποθέστε ὅτι ἡ G εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν ὁμάδα $\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}$, ὅπου $p_1, \ldots, p_k$ εἶναι πρῶτοι, ὄχι ὑποχρεωτικὰ διαφορετικοί, καὶ $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$. Δεῖξτε ὅτι μποροῦμε νὰ γράψομε $m = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$, ὅπου $0 \leq s_i \leq r_i$ γιὰ $i = 1, \ldots, k$. Ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς γενικό: Ἂν ὁ p εἶναι πρῶτος, $r \in \mathbb{N}$ καὶ $0 \leq s \leq r$, τότε τὸ στοιχεῖο $[p^{r-s}] \in \mathbb{Z}_{p^r}$ ἔχει τάξη p^s. Χρησιμοποιεῖστε το προκειμένου νὰ συμπεράνετε ὅτι, γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, k$, ἡ ὁμάδα $\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$ ἔχει μία ὑποομάδα H_i τάξεως $p_i^{s_i}$. Συνεπῶς, ἡ ὑποομάδα $H_1 \times \cdots \times H_k$ τῆς $\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}$ ἔχει τάξη $p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k} = m$.

29. Ἔστω $f(X) = 1 + 3X^2 + 4X^3 + 6X^7 + 8X^9 + 10X^{11} + 11X^{12}$ καὶ $g(X) = 3 + 3X^3 + 5X^5 + 7X^7 + 9X^9 + 11X^{11} + 13X^{13}$. Ὑπολογῖστε τοὺς συντελεστὲς τοῦ X^{16} καὶ τοῦ X^{13} στὸ γινόμενο $f(X)g(X)$, χωρὶς νὰ ὑπολογίσετε αὐτὸ τὸ γινόμενο.

30. (α′) Ἔστω D ἀκέραια περιοχή, $f(X), g(X) \in D[X]$, μὲ τὸ $g(X)$ νὰ ἔχει συντελεστὴ μεγιστοβαθμίου ὅρου μονάδα (στοιχεῖο τοῦ D^*). Ἔστω, ἐπίσης, $\epsilon \in D^*$. Ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς: Ἂν ἡ εὐκλείδεια διαίρεση τοῦ $f(X)$ διὰ $\epsilon g(X)$ δίνει πηλῖκο $q(X)$ καὶ ὑπόλοιπο $r(X)$, τότε ἡ εὐκλείδεια διαίρεση τοῦ $f(X)$ διὰ $g(X)$ δίνει πηλῖκο $\epsilon q(X)$ καὶ ὑπόλοιπο $r(X)$.
Εἰδικὴ περίπτωση: Ὅταν τὸ ϵ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίστροφο τοῦ συντελεστὴ τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου τοῦ $g(X)$. Τότε τὸ $\epsilon g(X)$ ἔχει συντελεστὴ μεγιστοβαθμίου ὅρου 1 καὶ ἡ εὐκλείδεια διαίρεση $f(X)$ διὰ $\epsilon g(X)$ εἶναι ἀρκετὰ ἁπλούστερη ἀπὸ τὴν ἐυκλείδεια διαίρεση τοῦ $f(X)$ διὰ $g(X)$. Δεῖτε τὸ ἑπόμενο ἐρώτημα, καθὼς καὶ τὴν ἄσκηση 31.
(β′) Ἔστω ἡ ἀκέραια περιοχὴ $D = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Θεωρῆστε τὰ πολυώνυμα μὲ συντελεστὲς στὴ D

$$\begin{aligned} f(X) &= 2X^4 + \sqrt{2}X^3 + (10 - 7\sqrt{2})X^2 + (4 - \sqrt{2})X - \sqrt{2} \\ g(X) &= (1 + \sqrt{2})X^2 + (2 + \sqrt{2})X - 3 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Παρατηρῆστε ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου τοῦ $g(X)$ εἶναι στοιχεῖο τῆς D^* καὶ ὑπολογῖστε τὸ πηλῖκο $q(X)$ καὶ τὸ ὑπόλοιπο $r(X)$ τῆς εὐκλείδειας διαί-

ρεσης τοῦ $f(X)$ διὰ $g(X)$.
Ἀπάντηση: $q(X) = 2(-1+\sqrt{2})X^2 + (-2+\sqrt{2})X + \sqrt{2}, \quad r(X) = (-6+2\sqrt{2})X + (-2+2\sqrt{2})$.

31. Ὑπολογῖστε πηλῖκο $q_i(X)$ καὶ ὑπολοιπο $r_i(X)$ τῆς εὐκλείδειας διαίρεσης τοῦ $f_i(X)$ διὰ $g_i(X)$ στὶς παρακάτω περιπτώσεις.

$$f_1(X) = (3\sqrt{2}+4)X^4 - 3X^3 + 8X^2 + X + 6\sqrt{2},$$
$$g_1(X) = (7+5\sqrt{2})X^2 + X + 1 + \sqrt{2}$$
$$f_2(X) = (14+10\sqrt{2})X^4 + (12+7\sqrt{2})X^3 + (26+20\sqrt{2})X^2 + (2\sqrt{2}+4)X + 7 + 2\sqrt{2},$$
$$g_2(X) = (7+5\sqrt{2})X^2 + X + 1 + \sqrt{2}$$
$$f_3(X) = (2\sqrt{3}+3)X^4 + (-\sqrt{3}+2)X^3 + 4\sqrt{3}X^2 + (-1-2\sqrt{3})X - 1$$
$$g_3(X) = (2+\sqrt{3})X^2 - 2X + (1-\sqrt{3})$$
$$f_4(X) = 6X^5 + 3X^4 + 2X^3 + X^2 + 4 \in \mathbb{Z}_7[X], \quad g(X) = 2X^2 + 2X + 6 \in \mathbb{Z}_7[X]$$
$$f_5(X) = 3X^6 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_5[X], \quad g(X) = 4X^5 + X^4 + 3X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$$

Ἀπαντήσεις:

$$q_1(X) = \sqrt{2}X^2 + (1-\sqrt{2})X + 1, \quad r_1(X) = 2X + 5\sqrt{2}$$
$$q_2(X) = 2X^2 + \sqrt{2}X + 2 + \sqrt{2}, \quad r_2(X) = 3 - \sqrt{2}$$
$$q_3(X) = \sqrt{3}X^2 + X + (1+\sqrt{3}), \quad r_3(X) = \sqrt{3}X + 1$$
$$q_4(X) = 3X^3 + 2X^2 + 4X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X], \quad r_4(X) = 2X + 5 \in \mathbb{Z}_7[X]$$
$$q_5(X)2X + 2 \in \mathbb{Z}_5[X], \quad r_5(X) = 0 \in \mathbb{Z}_5[X]$$

Ἔστω $f(X,Y) = \frac{1}{2}Y^3X^3 + \frac{3}{2}Y^3X^2 - Y^3 + YX^4 + 2YX^3 - 2YX^2 + YX + Y \in \mathbb{Q}[X,Y]$ καὶ $g(X,Y) = 2X^2 + Y^2X + Y^2$.
(α′) Θεωρῆστε αὐτὰ τὰ πολυώνυμα ὡς στοιχεῖα τοῦ $(\mathbb{Q}[Y])[X]$ καὶ ἐκτελέστε τὴν εὐκλείδεια διαίρεση τοῦ $f(X,Y)$ διὰ $g(X,Y)$. Ποιὸ εἶναι τὸ πηλίκο καὶ ποιὸ τὸ ὑπόλοιπο αὐτῆς τῆς διαίρεσης;
Τὸ πηλίκο εἶναι $\frac{1}{2}YX^2$ καὶ τὸ ὑπόλοιπο εἶναι $YX + Y$.
(β′) Θεωρῆστε τὰ ἴδια πολυώνυμα ὡς στοιχεῖα τοῦ $(\mathbb{Q}[X])[Y]$ καὶ ἐξηγῆστε γιατὶ δὲν γίνεται ἡ εὐκλείδεια διαίρεση τοῦ $f(X,Y)$ διὰ $g(X,Y)$.

32. Ὑπολογῖστε τὸ πηλίκο καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῶν παρακάτω εὐκλειδείων διαιρέσεων

τοῦ $f(X,Y)$ διὰ τοῦ $g(X,Y)$ (πολυώνυμα $\in \mathbb{Q}[X,Y]$), ὅταν αὐτὲς εἶναι ἐφικτές.

(α′) $$f(X,Y) = 6X^4Y^3 + 3X^5Y^3 + 2Y^4X + 2X^2Y^4 - 2X^3Y^2 - 2X^4Y^2 + 3X^3Y^3 + X^2 + XY + Y^2$$
$$g(X,Y) = 3X^3Y^2 + 2Y^3 - 2X^2Y + 3X^2Y^2$$

(β′) $$f(X,Y) = -X^4 + X^2Y^2 - 4X^2 + 2Y^4 + 11Y^2 - 3X^3Y + 6XY^3 + 3XY - 2X^3 + 4XY^2 + X^2Y - 2Y^3 + 4$$
$$g(X,Y) = X^2 + Y^2 + 3XY + 2X - Y + 5$$

Ἀπαντήσεις: (α′) Ἡ διαίρεση ὡς πρὸς X δὲν γίνεται. Ἡ διαίρεση ὡς πρὸς Y δίνει πηλίκο καὶ ὑπόλοιπο, ἀντιστοίχως $(X+X^2)Y,\ Y^2+XY+X^2$.
(β′) Ἡ διαίρεση ὡς πρὸς X δίνει πηλίκο καὶ ὑπόλοιπο, ἀντιστοίχως $-X^2+2Y^2+1,\ -2X+Y-1$. Ἡ διαίρεση ὡς πρὸς Y δίνει πηλίκο καὶ ὑπόλοιπο, ἀντιστοίχως $2Y^2-X^2+1,\ Y-2X-1$.

33. Ἀποδεῖξτε ὅτι, σὲ κάθε ἀκέραια περιοχή, ἡ σχέση διαιρετότητας $a|b$ δὲν ἐπηρεάζεται ἂν κάποιο (ή καὶ τὰ δύο) ἀπὸ τὰ a,b ἀντικατασταθεῖ ἀπὸ συνεταιρικό του στοιχεῖο.

34. Ἔστω ἀκέραια περιοχὴ D. Ἀποδεῖξτε ὅτι καθ’ ἕνα ἀπὸ τὰ σύνολα D^* καὶ $D \setminus D^*$ εἶναι κλειστὸ ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμό.

35. Ἔστω ἡ ἀκέραια περιοχὴ $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \overset{\text{ορσ}}{=} \{a + bi\sqrt{5} : a,b \in \mathbb{Z}\}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $D^* = \{-1,1\}$. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι τὰ $2, 3, 1+i\sqrt{5}, 1-i\sqrt{5}$ εἶναι ἀνάγωγα στοιχεῖα.

36. (Μία ἁπλούστατη, ἀλλὰ πολὺ χρήσιμη παρατήρηση.) Ἔστω ἀκέραια περιοχὴ D καὶ $a,b \in D$, τέτοια ὥστε $ab = 1$. Τότε $a,b \in D^*$. Ἰσοδύναμη (περίπου) διατύπωση: Τὸ μὴ μηδενικὸ $a \in D$ εἶναι μονάδα ἄν, καὶ μόνο ἄν, τὸ a εἶναι διαιρέτης τοῦ 1.

37. Ἔστω ἡ ἀκέραια περιοχὴ $\mathbb{Z}[i] \overset{\text{ορσ}}{=} \{a + bi : a,b \in \mathbb{Z}\}$. Δίδεται ἡ πληροφορία ὅτι, γιὰ τρία συγκεκριμένα στοιχεῖα $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{Z}[i]$ ἰσχύει $-i = \text{μκδ}(z_1,z_2,z_3)$. Εἶναι σωστό, ἢ λάθος, νὰ ποῦμε ὅτι τὰ z_1,z_2,z_3 εἶναι πρῶτα μεταξύ τους; Αἰτιολογῆστε τὴν ἀπάντησή σας.
Μερικὴ ἀπάντηση: Εἶναι σωστό.

38. Ἔστω ἀκέραιος $d > 1$, ποὺ δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο (ὁπότε $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$). Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:
(α′) Ἂν $a,b,r,s,u,v \in \mathbb{Z}$ καὶ $(a+b\sqrt{d})(r+s\sqrt{d}) = u+v\sqrt{d}$, τότε $(a-b\sqrt{d})(r-s\sqrt{d}) = u - v\sqrt{d}$.
(β′) Ἔστω ἡ ἀκέραια περιοχὴ $D = \{a + b\sqrt{d} : a,b \in \mathbb{Z}\}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $a + b\sqrt{d} \in D$ ἀνήκει στὸ D^* (εἶναι μονάδα τῆς D) ἂν καὶ μόνο ἂν $a^2 - db^2 = \pm 1$.
Ὑπόδειξη: Ἂν $a+b\sqrt{d} \in D^*$, τότε ὑπάρχει $r+s\sqrt{d} \in D$, τέτοιο ὥστε $(a+b\sqrt{d})(r+s\sqrt{d}) = 1$. Ἐκμεταλλευθεῖτε τὸ (α′).
Τὸ ἀντίστροφο εἶναι εὔκολο: Ἂν $a^2 - db^2 = 1$, τότε παραγοντοποιῆστε τὸ ἀριστερὸ μέλος καὶ

χρησιμοποιῆστε τὴν ἄσκηση 36.

(γʹ) Ἔστω ἡ ἀκέραια περιοχὴ $D = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Σᾶς δίνεται ἡ πληροφορία ὅτι τὸ $-26 + 15\sqrt{3} \in D$ εἶναι μκΔ κάποιων $\delta_1, \ldots, \delta_n \in D$. Εἶναι σωστό, ἢ λάθος, νὰ ποῦμε ὅτι τὰ $\delta_1, \ldots, \delta_n$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους; Αἰτιολογῆστε τὴν ἀπάντησή σας.

Μερικὴ ἀπάντηση: Εἶναι σωστό.

(δʹ) Ἔστω ἡ ἀκέραια περιοχὴ $D = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ καὶ τὰ στοιχεῖα της $\alpha = 407 + 235\sqrt{3}$ καὶ $\beta = -11 + 7\sqrt{3}$. Εἶναι τὰ α, β συνεταιρικά; Αἰτιολογῆστε. Στὴν ἴδια ἀκέραια περιοχή, ἔστω $\gamma = 54 + 32\sqrt{3}$ καὶ $\delta = 11 + 7\sqrt{3}$. Εἶναι τὰ γ, δ συνεταιρικά; Αἰτιολογῆστε.

Μερικὴ ἀπάντηση: Τὰ α, β εἶναι συνεταιρικά· τὰ γ, δ δὲν εἶναι. Γιὰ νὰ αἰτιολογήσετε τὶς ἀπαντήσεις σας, ὑπολογῖστε τὰ α/β κα ὶ γ/δ μὲ "ρητοποίηση τοῦ παρονομαστῆ" καὶ ἐφαρμόστε τὸ ἐρώτημα (βʹ).