ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014–15

## Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ
## 3Η ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 05/06/2015

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Έστω το $\mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες $(x, y, t)$ και έστω τα διανυσματικά πεδία

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

(α) Βρείτε 1–μορφή $\omega$ του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε

$$\omega(X) = \omega(Y) = 0, \quad \omega(T) = 1.$$

(β) Βρείτε την εξωτερική παράγωγο $d\omega$ και δείξτε ότι

$$d\omega(T, V) = 0, \quad \text{για κάθε} \quad V \in \mathrm{T}(\mathbb{R}^3).$$

(γ) Δείξτε ότι η $\phi = d\omega \wedge \omega$ δίνει προσανατολισμό στο $\mathbb{R}^3$ ισοδύναμο με τον συνήθη θετικό προσανατολισμό.

(δ) Έστω $g = (u, v, s) \in \mathbb{R}^3$ και η απεικόνιση

$$\ell_g(x, y, t) = (x + u, y + v, t + s + 2(xv - yu)).$$

Δείξτε ότι $\ell_g^*\omega = \omega$ και συμπεράνατε χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες ότι $\ell_g^*\phi = \phi$.

(ε) Έστω ο μοναδιαίος δίσκος $D = \{(\xi, \eta) \mid \xi^2 + \eta^2 < 1$ και έστω η εμφύτευσή του $\iota : D \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ που δίνεται από την

$$\iota(\xi, \eta) = (\xi, \eta, 0).$$

Βρείτε την $\omega_D = \iota^*\omega$ και αποδείξτε ότι η $d\omega_D$ δίνει στον $D$ προσανατολισμό ισοδύναμο με τον συνήθη $(\xi, \eta)$ προσανατολισμό του επιπέδου.

(στ) Γιά κάθε $r \in (0, 1)$ υπολογίστε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes το

$$\int_{\xi^2+\eta^2=r^2} \omega_D.$$

2. Έστω $f^1, \ldots, f^n$ λείες συναρτήσεις ορισμένες σε μία περιοχή $U$ ενός σημείου $p$ μιας λείας πολλαπλότητας $M$. Αποδείξτε ότι αυτές αποτελούν σύστημα συντεταγμένων σε μία περιοχή $W$ του $p$ αν και μόνο αν

$$(df^1 \wedge \cdots \wedge df^n)_p \neq 0.$$

3. Έστω $\Omega$ μία λεία 2–μορφή σε λεία πολλαπλότητα $M$ διάστασης 4. Η $\Omega$ λέγεται *μη εκφυλισμένη* εάν δεν υπάρχει διανυσματικό πεδίο $X$ της $M$ τέτοιο ώστε

$$\Omega(X, Y) = 0, \quad \text{για κάθε} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Η $\Omega$ λέγεται *συμπλεκτική* αν είναι μη εκφυλισμένη και κλειστή.

(α) Αποδείξτε ότι η $\Omega$ είναι μη εκφυλισμένη αν και μόνο αν $\Omega \wedge \Omega \neq 0$. (Υπόδειξη:

$$(\Omega \wedge \Omega)(V_1, V_2, V_3, V_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (\mathrm{sgn}\sigma)\Omega(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)})\Omega(V_{\sigma(3)}, V_{\sigma(4)}).$$

Υποθέστε τώρα ότι η $\Omega$ είναι εκφυλισμένη.)

(β) Έστω $(x^1, x^2, y^1, y^2)$ σύστημα τοπικών συντεταγμένων στην $M$ και έστω η τοπική έκφραση

$$\begin{aligned} \omega &= a_{11}dx^1 \wedge dx^2 + a_{13}dx^1 \wedge dy^1 + a_{14}dx^1 \wedge dy^2 \\ &\quad + a_{23}dx^2 \wedge dy^1 + a_{24}dx^2 \wedge dy^2 + a_{34}dy^1 \wedge dy^2 \end{aligned}$$

της $\omega$. Βρείτε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες μεταξύ των $a_{ij}$ ώστε η $\omega$ να είναι συμπλεκτική.

4. Έστω η κυλινδρική επιφάνεια $M$ στο $\mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες $(x, y, z)$ που δίνεται από τη σχέση $f(x, y) = 0$. Υποθέτουμε ότι $|\nabla f| \neq 0$.

(1) Αποδείξτε ότι η μορφή $dx \wedge dy$ περιορισμένη στην κυλινδρική επιφάνεια είναι ταυτοτικά 0.

(2) δείξτε ότι επάνω στην Μ είναι

$$\frac{dy \wedge dz}{f_x} = \frac{dz \wedge dx}{f_y},$$

(όποτε έχει νόημα). Πώς συνάγουμε την ύπαρξη μιάς πουθενά μηδενικής μορφής ορισμένης στην $M$;

5. Κατασκευάστε έναν προσανατολισμένο άτλαντα του μοναδιαίου κύκλου $S^1$.

6. Ποιο είναι το τοπολογικό και ποιο το διαφορικό σύνορο του συνόλου $(-1, 0] \cup \{4\}$;

7. Αποδείξτε το θεώρημα του Stokes για το κλειστό άνω ημιεπίπεδο.

8. Έστω η

$$\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

ορισμένη επάνω στην μοναδιά σφαίρα $S^2$.

(α) Υπολογίστε το

$$\int_{S^2} \omega$$

χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση σφαιρικών συνεταγμένων

$$(\phi, \theta) \mapsto (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi), \quad (\phi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$

(β) Αν $B^2$ είναι η μοναδιαία μπάλλα, αποδείξτε με τη βοήθεια του (α) ότι ο όγκος της είναι $4\pi/3$.

**Διάρκεια: 4 ώρες.**