ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014–15

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ
2Η ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 22/04/2015

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Θεωρια

1. Αποδείξτε ότι αν $g : N \to \mathbb{R}$ είναι μια λεία συνάρτηση σε μία πολλαπλότητα N, τότε κάθε μη κενό κανονικό σύνολο στάθμης $S = g^{-1}(c)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της N συνδιάστασης 1.

2. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα σταθερής βαθμίδας συνόλου στάθμης. Διατυπώστε επίσης τα θεωρήματα εμβάπτισης και καταβύθισης.

3. Έστω G λεία ομάδα Lie. Περιγράψτε την ισομορφία του $T_e(G)$ με τον χώρο $L(G)$ των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της G.

2. Ασκησεις

1.

(1) Δείξτε ότι το γράφημα
$$\Gamma(f) = \{(x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$
μίας λείας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+1}$.

(2) Είναι η λύση του συστήματος
$$x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 1,$$
$$w = xyz,$$
στον $\mathbb{R}^4$ λεία πολλαπλότητα; Δικαιολογήστε.

2. Αποδείξτε ότι κάθε εμβάπτιση F συμπαγούς πολλαπλότητας M σε πολλαπλότητα N είναι εμφύτευση, κάνοντας τα εξής βήματα:

(1) Θεωρώντας γνωστό ότι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ από συμπαγή X σέ Hausdorff Y είναι κλειστή, συμπεράνατε ότι η $F : M \to N$ είναι κλειστή.

(2) Αποδείξτε ότι εάν μία συνεχής 1–1 και επί απεικόνιση $f : X \to Y$, όπου X, Y, είναι τοπολογικοί χώροι, είναι κλειστή, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.

(3) Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

3. Υποθέστε ότι για ένα $X \in \mathfrak{X}(M)$ ισχύει $X_p = 0$ γιά κάποιο $p \in M$. Δείξτε ότι η ολοκληρωτική καμπύλη του X με αρχικό σημεί p είναι η σταθερή καμπύλη $c(t) = p$. Συμπεράνατε ότι αν X είναι το μηδενικό διανυσματικό πεδίο της M τότε η μονοπαραμετρική ομάδα αμφιδιαφορίσεων $c : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ αποτελείται μόνο από το ταυτοτικό στοιχείο.

Διάρκεια: 3 ώρες.