1*. Έστω $(X_j)_j$ ακολουθία τ.μ με $E(X_j) = \mu_j \ \kappa\alpha\iota \ \sigma^2(X_j) = \sigma_j^2 \leq c < +\infty$, $j = 1,2,\dots$

i) Αν η συνδιασπορά ικανοποιεί τη σχέση $cov(X_i, X_j) < 0$, $i, j = 1,2,\dots, i \neq j$, δείξετε ότι:

$$\bar{X}_n - \bar{\mu}_n \xrightarrow{p} 0 \text{ , όπου} \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j \text{ , } \bar{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mu_j$$

ii) Αν η τμ X_j εξαρτάται από τις τ.μ X_{j-1}και X_{j+1} αλλά είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες τ.μ,
η ανωτέρω σύγκληση παραμένει αληθής;

2*. Έστω ότι ένας παίκτης χάνει κ ευρώ αν το αποτέλεσμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου είναι $\kappa, \kappa = 1,2,3$ και κερδίζει r ευρώ αν το αποτέλεσμα είναι $6 - r + 1$, $r = 1,2,3$. Να υπολογισθεί, κατά προσέγγιση, η πιθανότητα όπως σε 42 ρίψεις κερδίσει τουλάχιστο 7 ευρώ.

3. Έστω $(X_j)_j$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισόνομων τ.μ με κοινή κατανομή Cauchy $e(\mu, \sigma^2)$, π.π $f(x) = \frac{\sigma}{\mu}\frac{1}{\sigma^2+(x-\mu)^2}$, $\forall x \epsilon \mathbb{R}, \mu \epsilon \mathbb{R}, \sigma^2 \epsilon \mathbb{R}_+^*$.

Να δείξετε ότι η ακολουθία των δειγματικών μέσων $(\bar{X}_n)_n$ δεν έχει ασυμπτωτική κανονική κατανομή ενώ έχει ακριβή κατανομή η οποία και να προσδιορισθεί.

Δίδεται ότι: Αν $X \sim e(\mu, \sigma^2)$, $\varphi_X(t) = \exp(i\mu t - \sigma|t|)$, $\forall t \epsilon \mathbb{R}$.

4*. Έστω X_j, $j = 1,2,\dots, n$, Y_j, $j = 1,2,\dots, n$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα:

$$EX_j = \mu_1, E(Y_j) = \mu_2, \sigma^2(X_j) = \sigma^2(Y_j) = \sigma^2 \text{ , } \mu_1, \mu_2 \epsilon \mathbb{R} \text{ , } \sigma^2 \epsilon \mathbb{R}_+^*$$

Αποδείξετε ότι:

i) $E(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) = \mu_1 - \mu_2$, $\sigma^2(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) = \frac{2\sigma^2}{n}$

ii) $\sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{2}} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{N}(0,1)$του $n \to +\infty$

iii) Αν τα παραπάνω δείγματα είναι κοινής κατανομής με

$EX_j = EY_j = \mu(\epsilon\mathbb{R})$και$\sigma^2(X_j) = \sigma^2(Y_j) = \sigma^2(\epsilon\mathbb{R}_+^*)$, $\forall j$,

καθορίσετε το μέγεθος n των δειγμάτων έτσι ώστε:

$P(|\bar{X}_n - \bar{Y}_n| \leq 0.25\sigma) = 0.95$

5*. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ με άγνωστη σ.κ $F(x)$, $x \epsilon \mathbb{R}$.

Ορίζουμε την εμπειρική σ.κ:

$$\forall \, x \epsilon \mathbb{R} \text{ , } F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{I}(X_j \leq x) = \frac{1}{n}\#\{X_j \leq x \text{ , } j = 1,2,\dots, n\},$$

η οποία είναι κλιμακωτή συνάρτηση με πήδημα $\frac{1}{n}$ στις θέσεις $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Αποδείξετε ότι, για $x(\epsilon\mathbb{R})$ – σταθερό,

i) $nF_n(x) \sim \mathcal{B}(n, p)$με $p = E(F_n(x)) = F(x)$

ii) $F_n(x) \xrightarrow{p} F(x)$, $n \to +\infty$

iii) $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{\kappa} \mathcal{N}\left(0, F(x)(1 - F(x))\right)$, $n \to +\infty$

iv) $2\sqrt{n}\left[\sin^{-1}\sqrt{F_n(x)} - \sin^{-1}\sqrt{F(x)}\right] \xrightarrow{\kappa} \mathcal{N}(0,1)$, $n \to +\infty$

6. Έστω $(X_n)_n$ ακολουθία τ.μ: $X_n \sim \mathcal{E}(\frac{1}{n})$ και έστω $Y_n = X_n - [X_n]$ όπου $[X_n]$ είναι το ακέραιο μέρος του X_n. Δείξετε ότι $Y_n \xrightarrow{\kappa} Y$ όπου Y συνεχής τ.μ καθορίζοντας την κατανομή της.

Σημείωση: Να λυθούν κατ΄ οίκον οι ασκήσεις με *