

Περιεχόμενο μαθημάτων του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

Παρακάτω περιγράφονται τα μεταπτυχιακά μαθήματα που προσφέρονται στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών. Πρόκειται για μαθήματα με κανονικές εβδομαδιαίες παραδόσεις, ασκήσεις, εργασίες, πρόχειρες και τελικές εξετάσεις, και βαθμολογία. Το περιεχόμενο των μεταπτυχιακών μαθημάτων ποικίλει, κατά τι, από χρόνο σε χρόνο, ανάλογα με τα ενδιαφέροντα των εκάστοτε διδασκόντων και διδασκομένων. Ειδικότερα, η ύλη των μαθημάτων με τίτλο «Θέματα.....» προτείνεται από τον εκάστοτε διδάσκοντα στην Σ.Ε., η οποία εισηγείται στην Σ.Τ. Το περιεχόμενο των μαθημάτων δύναται να αλλάξει με απόφαση των αρμοδίων οργάνων. Ακολουθεί η περιγραφή των μαθημάτων:

A10: ΑΛΓΕΒΡΑ I

I. Ομάδες: Δράσεις ομάδων σε σύνολα. Θεωρήματα Sylow. Ιδιότητες p -ομάδων. Μηδενοδύναμες ομάδες. Επιλύσιμες ομάδες. Θεώρημα Jordan-Holder.

II. Δακτύλιοι: Δακτύλιοι, υποδακτύλιοι, ιδεώδη, πρώτα και μεγιστικά ιδεώδη. Συνεταιρικά, πρώτα και ανάγωγα στοιχεία δακτυλίου. Περιοχές κυρίων ιδεωδών (PID), περιοχές μονοσήμαντης παραγοντοποίησης (UFD), Ευκλείδειες περιοχές και οι σχέσεις τους. Δακτύλιοι της Noether και του Artin. Δακτύλιοι πολυωνύμων. Το θεώρημα βάσης του Hilbert και η Nullstellensatz, Το θεώρημα του Gauss. Πρωταρχικά ιδεώδη και το θεώρημα Lasker-Noether. Δακτύλιοι εκτιμήσεων και δακτύλιοι Dedekind.

III. Modules: modules, ομομορφισμοί και ακριβείς ακολουθίες. Ελεύθερα modules, βασικές ιδιότητες. Προβολικά (projective), ενέσιμα (injective) και επίπεδα (flat) modules. Τανυστικά γινόμενα. Modules υπεράνω μιας PID και το βασικό θεώρημα δομής. Εφαρμογή σε πίνακες (ρητή κανονική μορφή, κανονική μορφή Jordan) και σε αβελιανές ομάδες (το θεώρημα κατάταξης).

A11: ΑΛΓΕΒΡΑ II

I. Επεκτάσεις σωμάτων: Ορισμοί. Βαθμός επέκτασης. Αλγεβρικές και υπερβατικές επεκτάσεις.

II. Αλγεβρικές επεκτάσεις: πεπερασμένες επεκτάσεις. Ελάχιστο πολυώνυμο στοιχείο. Απλές επεκτάσεις. Πεπερασμένα παραγόμενες επεκτάσεις. Η μεταβατικότητα των αλγεβρικών επεκτάσεων. Σώμα ριζών πολυωνύμων. Αλγεβρική θήκη. Ανυψώσεις εμβυθίσεων. Κανονικές επεκτάσεις. Διαχωρίσιμες επεκτάσεις. Τέλεια σώματα. Θεώρημα πρωταρχικού στοιχείου. Επεκτάσεις με πεπερασμένα σώματα. Διαχωρίσιμος βαθμός επέκτασης. Πλήρως μη διαχωρίσιμες επεκτάσεις. Διαχωρίσιμη θήκη. Κανονική θήκη.

III. Επεκτάσεις Galois: Ομάδα Galois μιας επέκτασης. Πολυώνυμο και ομάδες Galois. Σώματα αναλλοίωτων στοιχείων ως προς μια ομάδα αυτομορφισμών της επέκτασης. Επεκτάσεις Galois. Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois. Επεκτάσεις με ριζικά. Επιλυσιμότητα πολυωνυμικών εξισώσεων με ριζικά. Κατασκευάσιμοι αριθμοί. Πεπερασμένα σώματα και επεκτάσεις Galois. Πρωταρχικές ρίζες της μονάδος και κυκλοτομικές επεκτάσεις. Κυκλικές επεκτάσεις. Norm και ίχνος στοιχείων. Η διακρίνουσα. Επεκτάσεις Kummer. Το 90ό πρόβλημα του Hilbert.

IV. Υπερβατικές επεκτάσεις: Υπερβατικά στοιχεία. Υπερβατικές βάσεις. Το θεώρημα κανονικοποίησης της Noether. Το θεώρημα του Luroth.

A12: ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

I. Τετραγωνικά σώματα αριθμών.

II. Ακέραια εξάρτηση και δακτύλιοι του Dedekind: Δακτύλιοι Noether και Dedekind. Ακέραια εξάρτηση. Αριθμητική ιδεωδών και το τελικό θεώρημα.

III. Norm, ίχνος, βάση και διακρίνουσα: Norm και ίχνος. Διακρίνουσα μιας n -άδας. Ελεύθερες αβελιανές ομάδες με πεπερασμένο rank. Διακρίνουσα σώματος και βάση ακεραιότητας αυτού.

IV: Norm ιδεωδών και το πεπερασμένο αριθμού κλάσεων: Norm ιδεωδών αλγεβρικού σώματος αριθμών. Το πεπερασμένο του αριθμού κλάσεων.

V. Νόμος ανάλυσης και νόμος αντιστροφής: Εφαρμογή του νόμου αντιστροφής στα τετραγωνικά και κυκλοτομικά σώματα. Θεωρία διακλαδώσεων του Hilbert. Νόμοι αντιστροφής. Το θεώρημα της διακρίνουσας.

VI Το θεώρημα των μονάδων του Dirichlet: Διακριτές υποομάδες του R^n . Η κανονική εμφύτευση αλγεβρικού σώματος αριθμών. Εφαρμογές στην διακρίνουσα.

A13: ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ

Αναπαραστάσεις ομάδων. Βασικοί ορισμοί παραδείγματα. Ισοδύναμες αναπαραστάσεις, ανάγωγες αναπαραστάσεις, Modules και αναπαραστάσεις, Indecomposable modules, Λήμμα του Schur, Θεώρημα Wedderburn, Θεώρημα Maschke. Η κανονική (regular) αναπαράσταση και η ανάλυσή της. Θεωρία χαρακτήρων, βασικοί ορισμοί παραδείγματα. Σχέσεις ορθογωνιότητας, πλήθος χαρακτήρων. Τιμές χαρακτήρων, αλγεβρικοί ακέραιοι και πραγματικοί χαρακτήρες. Το Θεώρημα του Brauer. Πίνακας χαρακτήρων και οι πληροφορίες που δίνει για την ομάδα. Εφαρμογές: Αβελιανές ομάδες, ομάδες τάξης p^r και το Θεώρημα του Burnside. Επαγώμενοι χαρακτήρες, Frobenius's reciprocity. Κανονικές υποομάδες και επαγώμενοι χαρακτήρες, Θεωρήματα Clifford. Επεκτάσεις χαρακτήρων, Θεώρημα Gallagher.

A14: ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Αφφινικές ποικιλότητες. Το θεώρημα βάσης του Hilbert και η Nullstellensatz. Πολυωνυμικές συναρτήσεις, ρητές συναρτήσεις και δακτύλιοι συντεταγμένων. Η τοπολογία Zariski. Το sheaf των κανονικών (regular) συναρτήσεων σε μια αφφινική ποικιλότητα. Συναρτήσεις και μορφισμοί. Αλγεβρικές ποικιλότητες. Ο προβολικός χώρος και προβολικές ποικιλότητες. Διάσταση. Ρητές και αμφίρρητες απεικονίσεις. Blow up. Ομαλά σημεία και ιδιώματα μιας ποικιλότητας. Λείες ποικιλότητες. Το πολυώνυμο του Hilbert μιας προβολικής ποικιλότητας. Ο βαθμός μιας προβολικής ποικιλότητας. Θεωρία τομών, το θεώρημα του Bezout και εφαρμογές. Θέματα επιλογής, όπως: Schemes, συνομολογία των Sheaves. Αλγεβρικές καμπύλες.

A20: ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Η διαισθητική έννοια του "συνόλου", αξιώματα Zermelo-Fraenkel, δυναμοσύνολα, κατασκευή των φυσικών αριθμών, διατακτικοί αριθμοί και η αριθμητική τους, υπερ-πεπερασμένη επαγωγή, πληθάριθμοι, αξίωμα επιλογής, αξίωμα συνεχούς, "Μεγάλοι Πληθάριθμοι" και εφαρμογές, στοιχεία Περιγραφικής Συνολοθεωρίας, ειδικά θέματα.

A21: ΛΟΓΙΚΗ

Προτασιακός Λογισμός, πίνακες αληθείας, λογική συνέπεια, ταυτολογίες, τυπικές αποδείξεις, το Θεώρημα Πληρότητας και το Θεώρημα Συμπάγειας για τον Προτασιακό Λογισμό, κατηγορήματα, Κατηγορηματικός Λογισμός, πρωτοτάξιες γλώσσες, ερμηνείες (μοντέλα), ερμηνεία τύπων και προτάσεων, τυπικές αποδείξεις, ικανοποιησιμότητα συνόλων τύπων, τα Θεωρήματα Πληρότητας και Συμπάγειας στον Κατηγορηματικό Λογισμό, αναδρομικές συναρτήσεις, Θεώρημα Μη-Πληρότητας της Αριθμητικής, ερμηνείες της Θεωρίας Συνόλων και της αριθμητικής του Peano, ιδιότητες εκφράσιμες σε πρωτοτάξιες γλώσσες, πολύ-τιμη Λογική, στοιχεία "λ-calculus", ειδικά θέματα.

A22: ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Πεπερασμένα Αυτόματα (Μηχανές Πεπερασμένων Καταστάσεων), υπολογισιμότητα και μη υπολογισιμότητα με Πεπερασμένα Αυτόματα, Μηχανές Turing, Συστήματα Post, Αναδρομικές Συναρτήσεις, ισοδυναμία διαφόρων μοντέλων υπολογισμού, Πρόβλημα Τερματισμού και μη υπολογισιμότητα, αλγοριθμική πολυπλοκότητα και μέτρα πολυπλοκότητας, παραδείγματα πολυπλοκότητας, υπολογισιμότητα στη Θεωρία Αριθμών, την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία, ειδικά θέματα.

A23: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Η έννοια του 'Προβλήματος' στη Θεωρία Αλγορίθμων, χρονική και χωρική πολυπλοκότητα, βάσεις δεδομένων, τεχνικές εύρεσης "καλών" αλορίθμων, balancing, dynamic programming, αλγόριθμοι ταξινόμησης, κάτω φράγματα πολυπλοκότητας, μέση πολυπλοκότητα, αλγόριθμοι σε γραφήματα, αλγόριθμοι στην Άλγεβρα και την Γεωμετρία, Προβλήματα Nondeterministically Polynomial (NP), προβλήματα πλήρη στην κλάση NP, πρόβλημα SAT, πρόβλημα Hamilton, πρόβλημα "κλίκας", πρόβλημα επίλυσης συστήματος γραμμικών συστημάτων στους ακεραίους, ειδικά θέματα.

A30: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Συνδυαστικές αρχές με τη χρήση των στοιχειωδών αριθμητικών πράξεων, Γεννήτριες Συναρτήσεις, "Αρχή του Περιστερώνα", Συνδυαστικές αρχές στη Θεωρία Συνόλων, "μέτρηση Polya" με χρήση Θεωρίας Ομάδων, στοιχεία Αναλυτικής Συνδυαστικής, "Permutation Patterns", στοιχεία Θεωρίας Ramsey, Θεωρία Γραφημάτων, ειδικά θέματα.

A31: ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑ

I. Ιστορικά κρυπτοσυστήματα: Κρυπτοσύστημα του Καίσαρα, μονοαλφαβητική αντικατάσταση, πολυαλφαβητική αντικατάσταση, one-time-pad.

II. Τμηματικά κρυπτοσυστήματα (Block ciphers): Σχήμα του Feistel, DES, MACs.

III. Βασικοί αλγεβρικοί/αριθμοθεωρητικοί αλγόριθμοι: Ευκλείδειος αλγόριθμος, Κινέζικο θεώρημα υπολοίπου, υπολογισμοί στην ομάδα των ακεβραίων modulo n .

IV. Συστήματα δημοσίου κλειδιού: Πρωτόκολλο Diffie-Hellman (Το πρωτόκολλο Diffie-Hellman, Τα προβλήματα υπολογισμού και απόφασης Diffie-Hellman, το πρόβλημα του διακριτού λογαρίθμου). Συστήματα κρυπτογράφησης (Σύστημα ElGamal, σύστημα RSA, το πρόβλημα της παραγοντοποίησης ακεραίων, επιθέσεις και ορισμοί ασφαλείας). Συστήματα ψηφιακών υπογραφών (Σύστημα ElGamal, σύστημα RSA, υπογραφές DSA, υπογραφές Schnorr, επιθέσεις και ορισμοί ασφαλείας). Επιπλέον εφαρμογές (πχ συστήματα δέσμευσης).

V. Ειδικά θέματα: Εφόσον το επιτρέπει ο χρόνος (π.χ. κρυπτογραφία ελλειπτικών καμπύλων, κρυπτοσυστήματα σακιδίου, lattices και αλγόριθμος αναγωγής βάσης LLL, κρυπτοσυστήματα βασισμένα σε κώδικες)

A32: ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

I. Βασικές έννοιες σε πεπερασμένα σώματα: Βασικές έννοιες και ιδιότητες πεπερασμένων σωμάτων.

II. Γραμμικοί κώδικες: Βασικοί ορισμοί, γραμμική άλγεβρα πάνω από πεπερασμένα σώματα, κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση με σύνδρομα.

III. Φράγματα: Φράγμα Singleton, ορισμός και ιδιότητες κωδίκων MDS, φράγμα Hamming, ορισμός τέλειων κωδίκων και κωδίκων Hamming, φράγμα Gilbert-Varshamov.

IV. Κατασκευές: Βασικές μέθοδοι κατασκευής νέων κωδίκων από παλιούς, κώδικες Reed-Muller.

V. Κυκλικοί κώδικες; Γενική κατασκευή, κώδικες BCH, κλασικοί κώδικες Reed-Solomon.

VI. Αλγεβρο-Γεωμετρικοί κώδικες: Γενικευμένοι κώδικες Reed-Solomon, κώδικες Goppa.

B0: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Μέτρα και εξωτερικά μέτρα, μέτρο Lebesgue και γενικότερα μέτρα Borel, μετρήσιμες συναρτήσεις, θεώρημα Luzin, ολοκλήρωμα, ολοκλήρωμα Lebesgue και Lebesgue-Stieltjes, μέτρο γινόμενο και πολλαπλά ολοκληρώματα, θεωρήματα Tonelli και Fubini, συγκλίσεις (κατά σημείο, κατά μέσο, κατά μέτρο, σχεδόν ομοιόμορφη), προσημασμένα και μιγαδικά μέτρα, οι διασπάσεις Hahn, Jordan και Lebesgue (απολύτως συνεχή και ιδιάζοντα μέτρα), μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood, θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue, παράγωγος Radon-Nikodym, οι χώροι L_p και ο δυσισμός τους. Επιπλέον θέματα ανάλογα με τον χρόνο: συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης, απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις, θεωρία χώρων Hilbert, σειρές Fourier στον L_2 , μέτρα Borel σε (τοπικά) συμπαγείς χώρους και θεώρημα αναπαράστασης Riesz.

B1: ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Χώροι με νόρμα. χώροι Banach, διαχωρισιμότητα, λήμμα Riesz και συμπάγεια κλειστής μπάλας, ομοιόμορφα κυρτές νόρμες, απόσταση σημείου από κυρτό κλειστό σύνολο. χώροι με εσωτερικό γινόμενο, χώροι Hilbert, ορθογώνιο συμπλήρωμα, προβολές, ορθοκανονικά σύνολα και βάσεις, ανισότητα Bessel, θεώρημα Riesz-Fischer, ταυτότητα Parseval, διαχωρισιμότητα και θεώρημα Schmidt, δυικός χώρος. θεώρημα Riesz για χώρους Hilbert, θεώρημα Hahn-Banach (και Bohnenblust-Sobczyk) στη γενική μορφή του, δεύτερος δυικός, αυτοπάθεια, θεώρημα Baire. αρχή ομοιόμορφου φράγματος για συναρτησοειδή, ασθενής και ασθενής- σύγκλιση, θεώρημα Mazur, θεώρημα Helly, * ασθενής και ασθενής-τοπολογία, θεώρημα Alaoglu, φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, η άλγεβρα $* B(X)$, δυικός τελεστής. αρχή ομοιόμορφου φράγματος, σύγκλιση (κατά νόρμα, ισχυρή, ασθενής) τελεστών, θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, θεώρημα κλειστού γραφήματος, φάσμα τελεστή (σημειακό, συνεχές, περιθωριακό), συμπάγεια φάσματος, ολομορφία αναλύοντος τελεστή, φασματική ακτίνα, συμπαγής τελεστής, συζυγής τελεστής, φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς (και κανονικούς) τελεστές. Επιπλέον θέματα ανάλογα με τον χρόνο: τοπικά κυρτοί χώροι, χώροι Frechet, θεώρημα Schauder για τη συμπάγεια του τελεστή και του δυικού του, φάσματα συμπαγών τελεστών, θεώρημα Riesz-Schauder, βάσεις Hamel και Schauder, θεωρήματα σταθερού σημείου, εργοδικό θεώρημα von Neumann, τελεστές Hilbert-Schmidt, ακραία σημεία, θεώρημα Krein-Milman, και ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις.

B2: ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τοπολογία μιγαδικού επιπέδου (συμπαγή, συνεκτικά σύνολα), επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο, όρια και συνέχεια συναρτήσεων, σειρές αριθμών και συναρτήσεων (τέστ Weierstrass), επικαμπύλια ολοκληρώματα, παράγωγος και ολομορφία, εξισώσεις Cauchy-Riemann, ειδικές συναρτήσεις (εκθετική, κλάδοι λογαρίθμου, δυνάμεις, κλάδοι ριζών, συναρτήσεις οριζόμενες από επικαμπύλια ολοκληρώματα, συναρτήσεις οριζόμενες από δυναμοσειρές), θεώρημα Cauchy-Goursat, ύπαρξη αντιπαράγωγου σε ειδικά (π.χ. κυρτά) σύνολα, τοπικοί τύποι Cauchy, σειρές Taylor και Laurent, πολλαπλότητα ρίζας, ανωμαλίες (πόλοι, ουσιώδεις και σχετικά κριτήρια), θεώρημα Morera. Εκτιμήσεις Cauchy, θεώρημα Liouville, θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας, αρχή ταυτότητας, αρχή μεγίστου, αρχή ανοικτής απεικόνισης, δείκτης στροφής, ομοτοπία καμπυλών, αλυσίδες και κύκλοι (καμπυλών), ομολογία, σφαιρικό θεώρημα Cauchy, θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, (υπολογισμοί ολοκληρωμάτων), μερόμορφες συναρτήσεις, αρχή ορίσματος, θεώρημα Rouché, απλή συνεκτικότητα (ομοτοπική, ομολογική, τοπολογική), πεπερασμένη συνεκτικότητα, προσέγγιση με πολυώνυμα και ύπαρξη κλάδου λογαρίθμου σε απλά συνεκτικό σύνολο, περίοδοι συνάρτησης σε πεπερασμένα συνεκτικό σύνολο, ομοιόμορφη σύγκλιση στα

συμπαγή υποσύνολα ανοικτού συνόλου, θεώρημα Montel, θεώρημα Hurewicz, λήμμα Schwarz, θεώρημα Riemann, σύμμορφοι αυτομορφισμοί του δίσκου και του άνω ημιεπιπέδου. Επιπλέον θέματα ανάλογα με τον χρόνο: θεώρημα προσέγγισης Runge, τύπος και ανισότητα Jensen, ακέραιες συναρτήσεις (κανονική αναπαράσταση), θεώρημα παραγοντοποίησης Weierstrass, θεώρημα Mittag-Leffler, αρμονικές συναρτήσεις (τύπος Poisson, αρμονική συζυγής, συνοριακές τιμές, αρχή ανάκλασης, αρχή Harnack, πρόβλημα Dirichlet), συναρτήσεις Γ και ζ , θεώρημα κατανομής πρώτων, αναλυτική συνέχιση και θεώρημα μονοδρομίας, χώροι H_p .

B3: ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σειρές Fourier στον L^1 (και άρα στους L_p), λήμμα Riemann-Lebesgue, κριτήρια σύγκλισης (Dini, Jordan), πυρήνες Dirichlet, Fejer, Poisson, προσεγγίσεις της μονάδας, αθροισμότητα κατά νόρμα, πυκνότητα τριγωνομετρικών πολυωνύμων στους L_p , μετασχηματισμός Fourier στον L^1 , λήμμα Riemann-Lebesgue, κριτήρια σύγκλισης (Dini, Jordan), μετασχηματισμός Fourier στον χώρο του Schwarz και στον χώρο των tempered κατανομών (π.χ. στον χώρο των μιγαδικών μέτρων Borel), μετασχηματισμός Fourier στον L^2 , ανισότητα Hausdorff-Young, μετασχηματισμός Fourier στους L_p ($1 < p < 2$), φραγμένοι γραμμικοί τελεστές στους L^1 και L^2 αναλλοίωτοι από μεταφορές, τύπος αντιστροφής στους L^1 και L^2 , πυρήνες Gauss, Poisson, ισχυρά και ασθενώς φραγμένοι γραμμικοί τελεστές στους L_p , μεγιστικός τελεστής οικογένειας τελεστών, θεώρημα Marcinkiewicz, επανάληψη μεγιστικού τελεστή Hardy-Littlewood (στους L_p και στον L_{logL}) και ο ρόλος του στον έλεγχο άλλων μεγιστικών τελεστών, διάσπαση Calderon-Zygmund, ο συζυγής του πυρήνα Poisson και ο τελεστής Hilbert στους L_p για διάσταση 1, πολλαπλασιαστές, κ.σ. αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier (και κ.σ. σύγκλιση των σειρών Fourier) για διάσταση 1, μετασχηματισμός Fourier θετικών μέτρων, θετικά ορισμένες κατανομές, θεώρημα Bochner. Επιπλέον θέματα ανάλογα με τον χρόνο: ο χώρος BMO, θεώρημα John-Nirenberg, αντίστροφες ανισότητες Hölder, ο τελεστής Hilbert στον L^∞ και BMO, ο μετασχηματισμός Fourier $L_p \rightarrow L_{p'}$ δεν είναι επί (λήμμα van der Corput και ανισότητα Khintchin), singular integrals και τελεστές Calderon-Zygmund, τελεστές Riesz.

B4: ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Παραδείγματα μετρήσιμων δυναμικών συστημάτων, το θεώρημα επαναφοράς του Poincare, το εργοδικό θεώρημα Von Neumann και Birkhoff, το θεώρημα Von Neumann για τετράγωνα, εφαρμογή σε θεωρία Ramsey (θεώρημα Furstenberg-Sarkozy), εφαρμογές (ισοκατανομή ακολουθιών, κανονικοί αριθμοί, συνεχή κλάσματα, ισχυρός νόμος μεγάλων αριθμών για στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις), παραδείγματα weak mixing συστημάτων και ισοδύναμοι ορισμοί, strong mixing, ισομορφία, factors, Kronecker factor, θεώρημα διακριτού φάσματος Halmos-Von Neumann, αμετάβλητα μέτρα σε συμπαγείς μετρικούς χώρους, μοναδικά εργοδικά συστήματα, ισοκατανομή άρρητων πολυωνύμων, εργοδική ανάλυση αμετάβλητων μέτρων, πολλαπλό εργοδικό θεώρημα Furstenberg, εφαρμογή σε θεωρία Ramsey (θεώρημα Roth), εντροπία διαμέρισης και δυναμικού συστήματος, υπολογισμός σε απλές περιπτώσεις, μη ισομορφία Bernoulli 2-shift και 3-shift, το θεώρημα Shannon-McMillan-Breiman.

G0: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

I. Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες: Διαφορίσιμες πολλαπλότητες και απεικονίσεις. Ο εφαπτόμενος χώρος και η εφαπτομένη δέσμη. Υποπολλαπλότητες. Διανυσματικά πεδία και παράγωγος Lie. Ολοκλήρωση διανυσματικών πεδίων και ροές.

II. Συνοχές σε πολλαπλότητες: Γραμμικές συνοχές. Γεωδαισιακές και η εκθετική απεικόνιση.

III. Πολλαπλότητες Riemann: Μετρικές Riemann Η συνοχή Levi-Civita. Γεωδαισιακές και κανονικοί χάρτες σε πολλαπλότητες Riemann, Οι γεωδαισιακές στους χώρους μοντέλα.

IV. Γεωμετρία και απόσταση: Απόσταση και τοπολογία σε μια πολλαπλότητα Riemann. Πληρότητα και το θεώρημα Hopf-Rinow. Ισομετρίες και το θεώρημα Myers-Steenrod.

V. Καμπυλότητα: Ο τανυστής καμπυλότητας Καμπυλότητα τομής και καμπυλότητα Ricci Riemannian submersions και οι τύποι του O'Neil. Η δεύτερη ταυτότητα του Bianchi, το θεώρημα του Schur και οι πολλαπλότητες Einstein.

VI. Γεωμετρία και Τοπολογία: Η διαφορική εξίσωση το Jacobi. Συζυγή σημεία και το θεώρημα Cartan-Hadamard-Kobayashi. Χώροι σταθερής καμπυλότητας τομής και κατάταξη Η μεταβολή του συναρτησοειδούς του μήκους και ο τύπος του Synge. Το θεώρημα Bonnet-Myers.

Γ1: ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

I. Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες: Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες. Λείες απεικονίσεις σε πολλαπλότητες. Πολλαπλότητες πηλίκια.

II. Εφαπτόμενος χώρος: Εφαπτόμενος χώρος. Εφαπτόμενη Δέσμη. Υποπολλαπλότητες. Θεωρήματα Σταθερής Βαθμίδας. Εφαπτόμενη Δέσμη. Διαμέριση της μονάδας. Διανυσματικά πεδία.

III. Στοιχεία Ομάδων Lie: Ομάδες Lie. Άλγεβρες Lie

IV. Διαφορικές Μορφές: Διαφορικές 1- Μορφές. Διαφορικές k- Μορφές. Εξωτερική παράγωγος. Παράγωγος Lie και εσωτερικός πολλαπλασιασμός.

V. Ολοκλήρωση: Προσανατολισμοί. Πολλαπλότητες με σύνορο. Ολοκλήρωση επί πολλαπλοτητων. Θεώρημα Stokes.

VI . Θεωρία DeRham: Συνομολογία DeRham. Μακρά ακριβής ακολουθία στη συνομολογία. Ακολουθία Mayer-Vietoris. Αναλλοίωτο της ομοτοπίας. Υπολογισμοί συνομολογιών.

Γ2: ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ - ΟΜΟΤΟΠΙΑ

I. Ομοτοπία: Ομοτοπικές απεικονίσεις Ομοτοπικός τύπος Κατηγορίες, συναρτητές και αλγεβρικά αναλλοίωτα. Οι κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες

II. Η θεμελιώδης ομάδα: Κατασκευή της θεμελιώδους ομάδας. Παραδείγματα και εφαρμογές. Ελεύθερες ομάδες και ελεύθερα γινόμενα. Το θεώρημα Seifert-Van Kampen. Υπολογισμοί και εφαρμογές του θεωρήματος Seifert-Van Kampen.

III. Χώροι επικάλυψης: Βασικές έννοιες και παραδείγματα. Ανυψώσεις απεικονίσεων σε χώρους επικάλυψης. Απεικονίσεις επικάλυψης και θεμελιώδης ομάδα. Η καθολική επικάλυψη ενός χώρου. Οι αυτομορφισμοί μιας επικάλυψης. Η κατάταξη των επικάλυψεων ενός χώρου μέσω υποομάδων της θεμελιώδους ομάδας.

V. Ανώτερες ομάδες ομοτοπίας: H-groups και loop spaces. Η ανάρτηση (suspension). Ομάδες ομοτοπίας. Ακριβείς ακολουθίες. Ινώσεις (fibrations). Ο ρόλος του βασικού σημείου. Οι ομάδες ομοτοπίας των σφαιρών.

Γ3: ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ - ΟΜΟΛΟΓΙΑ

I. Ομολογία: Ομοτοπία και ομοτοπικές απεικονίσεις. Ομοτοπικός τύπος. Κατηγορίες, συναρτητές και αλγεβρικά αναλλοίωτα. Οι ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου. Αλυσωτά συμπλέγματα και ακριβείς ακολουθίες. Τα αξιώματα Eilenberg-Steenrodγια μία ομολογική θεωρία και συνέπειες. Η ιδιάζουσα ομολογία (singular homology). Το ομοτοπικό αξίωμα για την ιδιάζουσα ομολογία. Το αξίωμα της περικοπής για την ιδιάζουσα ομολογία. Η ακριβής ακολουθία Mayer-Vietoris και εφαρμογές της ιδιάζουσας ομολογίας. Το θεώρημα του Hurewicz.

II. Ομολογία με συντελεστές: Το τανυστικό γινόμενο. Το torsion product. Universal Coefficient Theorem. Η ιδιάζουσα ομολογία με συντελεστές.

III. Συνομολογία: Ομάδες ομομορφισμών. Hom και Ext. Συνομολογία αλυσωτών συμπλεγμάτων. Η ιδιάζουσα συνομολογία.

IV. Γινόμενα: Το cross product, το Θεώρημα Eilenberg-Zilber και ο τύπος του Kunneth. Το cross product στην συνομολογία. Το cup product και εφαρμογές.

V. Τοπολογικές πολλαπλότητες και Δυϊσμός: Προσανατολισμός τοπολογικών πολλαπλοτήτων. Η ιδιάζουσα ομολογία μιας τοπολογικής n -πολλαπλότητας στους βαθμούς $\geq n$. Το cap product. Αλγεβρικά όρια. Δυϊσμός Poincare-Lefschetz. Εφαρμογές.

Γ4: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Διαφορικές εξισώσεις και ολοκλήρωση διανυσματικών πεδίων. Ροές και η φύση των τροχιών τους. Αναλλοίωτα και ελάχιστα σύνολα. Γραμμικά δυναμικά συστήματα. Στροφές του κύκλου. Μονοπαραμετρικές υποομάδες του n -torus. Gradient διανυσματικά πεδία. Η μετάθεση (shift) στο χώρο των ακολουθιών συμβόλων από πεπερασμένο αλφάβητο. Αναλλοίωτα μέτρα. Μονοσήμαντη εργοδικότητα. Το θεώρημα ισοκατανομής το Weyl. Σωληνοειδή και προσθετικές μηχανές. Συζυγία .Η λογιστική απεικόνιση. Το πέταλο του Smale.Χάος. Το θεώρημα του Sharkovskii. Θεωρία Poincare-Bendixson και εφαρμογές. Ροές στον 2-torus χωρίς σταθερά σημεία. Ομοιομορφισμοί του κύκλου και ο αριθμός στροφής του Poincare. Ημισυζυγία με στροφές. Η ανισότητα Denjoy-Koksma και μονοσήμαντη εργοδικότητα. Το θεώρημα του Denjoy και το θεώρημα του A. J. Schwartz. Παραδείγματα C^1 αμφιδιαφορίσεων των Denjoy-Herman.

Δ10: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Εξίσωση του Laplace : Βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων, Ανισότητα Harnack, Θεμελιώδης λύση, Συναρτήσεις Green, Πυρήνας Dirichlet για μπάλλα και ημίχωρο, Εξίσωση Poisson, Αρχή μεγίστου, Ενεργειακές μέθοδοι, Αρχή του Dirichlet, Η μέθοδος του Perron.

Εξίσωση θερμότητας: Θεμελιώδης λύση, Πρόβλημα Cauchy, Μη ομογενές πρόβλημα, Ιδιότητα μέσης τιμής, Ανισότητα Harnack, Αρχή μεγίστου, Ομαλότητα, Ενεργειακές μέθοδοι.

Κυματική Εξίσωση: Οι τύποι Kirchoff και Poisson, Μη ομογενές πρόβλημα, Ενεργειακές μέθοδοι.

Εξισώσεις Ελλειπτικού τύπου: Αρχή μεγίστου, A priori εκτιμήσεις, Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, A priori εκτιμήσεις Schauder, Πρόβλημα Dirichlet στην γενική περίπτωση.

Εξισώσεις Παραβολικού τύπου: Αρχή μεγίστου, A priori εκτιμήσεις.

Μη γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης: Η μέθοδος των χαρακτηριστικών.

Δ11: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Χώροι Sobolev : Ασθενείς παράγωγοι, Χώροι Sobolev, Ιδιότητες, Προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις, Επέκταση, Ίχνος, Ανισότητες Sobolev, Ανισότητες Morrey, Συμπάγεια, Δυικοί χώροι, Χώροι με χρόνο.

Ελλειπτικές Εξισώσεις: Ασθενείς λύσεις, Ύπαρξη ασθενών λύσεων, Ενεργειακές μέθοδοι, Εναλλακτικό του Fredholm, Εσωτερική ομαλότητα, Συνοριακή ομαλότητα, Ιδιοτιμές, Ιδιοσυναρτήσεις.

Παραβολικές εξισώσεις: Ασθενείς λύσεις, Η μέθοδος Galerkin, Ενεργειακές εκτιμήσεις, Ύπαρξη ασθενών λύσεων, Μονοσήμαντο ασθενών λύσεων, Ομαλότητα ασθενών λύσεων.

Υπερβολικές εξισώσεις: Ασθενείς λύσεις, Η μέθοδος Galerkin, Ενεργειακές εκτιμήσεις, Ύπαρξη ασθενών λύσεων, Μονοσήμαντο ασθενών λύσεων, Ομαλότητα ασθενών λύσεων.

Υπερβολικά συστήματα πρώτης τάξης: Ασθενείς λύσεις, Η μέθοδος του ιξώδους, Ενεργειακές εκτιμήσεις, Ύπαρξη και μονοσήμαντο.

Δ12: ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Τοπική ύπαρξη λύσεων (Picard--Lindeloff και Peano). Μονοσήμαντο λύσεων. Λήμμα Gronwall. Ομαλή εξάρτηση λύσεων από δεδομένα -- παραμέτρους.

Γραμμικά συστήματα: Θεμελιώδεις λύσεις, σταθεροί και μη σταθεροί συντελεστές, ασυμπτωτική συμπεριφορά λύσεων.

Ασυμπτωτική συμπεριφορά μη γραμμικών εξισώσεων. Ευστάθεια και αστάθεια λύσεων. Γραμμικοποίηση. Συναρτησοειδή Lyapunov για μελέτη ευστάθειας.

Poincare-- Bendixson, ύπαρξη περιοδικών λύσεων. Στοιχεία θεωρίας διακλάδωσης στη μία και δύο διαστάσεις. Διαγράμματα φάσεων για αυτόνομα συστήματα.

Δ14: ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Ευθείς μέθοδοι Λογισμού Μεταβολών, Ύπαρξη Ελαχιστοποιητών, Coersivity, Κάτω ημισυνέχεια, Ασθενείς λύσεις της Euler-Lagrange, Κυρτότητα, Σύστήματα, Οιωνεί κυρτότητα, Τοπικοί Ελαχιστοποιητές, Δεσμεύσεις, Compansated Συμπάγεια, Concantration Συμπάγεια, Οριακές περιπτώσεις συνθήκης Palais-Smale, Αναλλοίωτα, Θεώρημα Noether, Αποτελέσματα Pohozaev, Brezis-Nirenberg, Lions, Struwe, Η επίδραση της Τοπολογίας, Ισοπεριμετρικές Ανισότητες.

Δ15: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΡΕΥΣΤΩΝ

I) Εξισώσεις Navier-Stokes για ασυμπίεστα ρευστά.

II) Βασικοί συναρτησιακοί χώροι, ανισότητες και θεωρήματα εμφύτευσης. Θεώρημα Riesz και Leray – Schauder.

III) Μη γραμμική στατική περίπτωση. Ασθενής μορφή του προβλήματος. Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Κλασική λύση.

IV) Μη γραμμική μη στατική περίπτωση. Ασθενής μορφή του προβλήματος. Ολική και τοπική λύση. Μέθοδος Galerkin. Ύπαρξη και μοναδικότητα της ολικής λύσης για $n=2$. Ύπαρξη και μοναδικότητα της τοπικής λύσης για $n=3$. Κλασική λύση. Ύπαρξη της ολικής ασθενούς λύσης για $n=3$.

V) Σύντομη αναφορά στις εξισώσεις Navier - Stokes για συμπίεσιμα ρευστά, εξισώσεις Euler και Prandtl.

Δ20: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

I. Ορισμός νόρμας και εσωτερικού γινομένου σε ένα γραμμικό χώρο. Βασικές ιδιότητες νορμών και εσωτερικού γινομένου. Ανισότητα Cauchy-Schwarz. Νόρμα που παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο. Βασικές νόρμες του χώρου διανυσμάτων, όπως η Ευκλείδεια νόρμα, η νόρμα μεγίστου, η νόρμα αθροίσματος, η νόρμα Frobenius και η p -νόρμα. Ανισότητες Young, Holder και Minkowski. Σύγκλιση σε χώρο με νόρμα και πληρότητα χώρου με νόρμα. Ισοδυναμία νορμών. Ισοδυναμία νορμών σε χώρο με πεπερασμένη διάσταση. Βέλτιστες προσεγγίσεις από υπόχωρο σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

II. Νόρμες πινάκων. Υποπολλαπλασιαστικές νόρμες πινάκων. Φυσικές νόρμες πινάκων. Χαρακτηρισμός των φυσικών νορμών πινάκων που παράγονται από τη νόρμα μεγίστου, τη

νόρμα αθροίσματος και την Ευκλείδεια νόρμα. Αντιστρεψιμότητα του πίνακα I-A όταν η φυσική νόρμα του A είναι μικρότερη από ένα, και αναπαράσταση του αντιστρόφου του I-A ως γεωμετρική σειρά του A. Σύγκλιση σειρών πινάκων.

III. Δείκτης κατάστασης ενός πίνακα. Ανάλυση διαταραχών για γραμμικά συστήματα. Επιρροή του σφάλματος αποκοπής και στρογγύλευσης στη λύση γραμμικών συστημάτων.

IV. Επίλυση γραμμικών συστημάτων με συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα: Θετικά ορισμένοι πίνακες και ιδιότητές τους. Η ανάλυση Cholesky και ο αλγόριθμός της. Απαιτούμενη μνήμη και υπολογιστικό κόστος για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με την ανάλυση Cholesky. Κατασκευή της μεθόδου καθόδου μεγίστης κλίσης και η σύγκλιση της. Κατασκευή της μεθόδου συζυγών κλίσεων και η σύγκλιση της. Απαιτούμενη μνήμη και υπολογιστικό κόστος της μεθόδου συζυγών κλίσεων.

V. Προσέγγιση της λύσης μη γραμμικών συστημάτων: Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Διαφορίσιμες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Θεώρημα μέσης τιμής και τετραγωνική προσέγγιση για διαφορίσιμες συναρτήσεις. Μια γενική επαναληπτική μέθοδος για την προσέγγιση της ρίζας ομαλών συναρτήσεων μίας μεταβλητής, συνθήκες σύγκλισής της και τάξη σύγκλισής της. Η μέθοδος Newton για της προσέγγιση της λύσης συναρτήσεων μίας μεταβλητής και συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων. Σύγκλιση της μεθόδου του Newton.

VI. Προβλήματα αρχικών τιμών για ΣΔΕ. Μοναδικότητα της λύσης υπό τη συνθήκη Lipschitz και υπό τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz. Ανισότητα Gronwall. Η μέθοδος του Euler: κατασκευή, ευστάθεια, συνέπεια, σύγκλιση. Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler: ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων, συνέπεια, ευστάθεια και σύγκλιση. Γενική θεωρία μεθόδων Runge-Kutta και πολυβηματικών μεθόδων. Α-ευστάθεια και συνάρτηση ευστάθειας.

VII. Παρεμβολή και προσέγγιση. Αριθμητική ολοκλήρωση.

Δ21: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

I. Σύντομη εισαγωγή στη θεωρία χώρων Hilbert. Θεώρημα αναπαράστασης Riesz. Θεώρημα Lax-Milgram. Θεώρημα Galerkin. Γενικευμένες παράγωγοι. Χώροι Sobolev. Θεωρήματα πυκνότητας σε χώρους L_p και χώρους Sobolev.

II. Πολυωνυμικοί χώροι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Χώροι πεπερασμένων στοιχείων βασισμένοι σε τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις. Χώροι πεπερασμένων στοιχείων ισοδύναμοι ως προς τη μετατόπιση. Το λήμμα Bramble-Hilbert. Προσεγγιστικές ιδιότητες χώρων πεπερασμένων στοιχείων με εκτιμήσεις του σφάλματος προσέγγισης σε νόρμες χώρων Sobolev.

III. Ασθενής διατύπωση του προβλήματος συνοριακών τιμών: α) για το δεύτερης τάξης, γραμμικό πρόβλημα δύο σημείων και β) για δεύτερης τάξης, γραμμικές ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Κατασκευή προσεγγίσεων της ασθενούς λύσης με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. και εκτιμήσεις σφάλματος για τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

IV. Κατασκευή μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων για προβλήματα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας και την εξίσωση του κύματος.

V. Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών: Ευστάθεια, συνέπεια και σύγκλιση των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών για το πρόβλημα δύο σημείων, την μονοδιάστατη εξίσωση της θερμότητας και την εξίσωση Poisson σε ορθογώνιο χωρίο.

Δ23: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

I. Απαλοιφή Gauss (μερική και ολική οδήγηση). LU ανάλυση. Ανάλυση Cholesky. Αριθμητική επίλυση αραιών συστημάτων. Οπισθοδρομική ανάλυση σφάλματος.

II. Γενική θεωρία γραμμικού προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων. QR ανάλυση. Μετασχηματισμοί Householder και Givens. Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών (SVD). Υπολογισμός ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών.

III. Γενική επαναληπτική μέθοδος. Μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel. Μέθοδοι χαλάρωσης (SOR, SSOR). Μέθοδοι Chebyshev. Μέθοδος καθόδου μεγίστης κλίσης και μέθοδος συζυγών κλίσεων. Μέθοδοι υπόχωρων του Krylov (Arnoldi, GMRES, QMR, MINRES).

IV. Τεχνικές προρρύθμισης.

V. Προσέγγιση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων.

E10: ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Κατασκευή χώρων πιθανότητας, τυχαίες μεταβλητές, κατασκευή στοχαστικών διαδικασιών, ανεξαρτησία, μέση τιμή, η πιθανοθεωρητική μέθοδος σε συνδυαστική και θεωρία αριθμών, είδη σύγκλισης (σχεδόν βέβαια, κατά τετραγωνικό μέσο, κατά πιθανότητα, κατά κατανομή), νόμος 0-1 Kolmogorov, ασθενής και ισχυρός νόμος μεγάλων αριθμών, θεώρημα τριών σειρών, νόμος επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου Khintchine, εφαρμογές οριακών θεωρημάτων, χαρακτηριστικές συναρτήσεις, το κεντρικό οριακό θεώρημα για ανεξάρτητες και εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές (συνθήκη Lindeberg), εφαρμογές οριακών θεωρημάτων, δεσμευμένη μέση τιμή, (sub)-martingales, οριακά θεωρήματα και εφαρμογές.

E11: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Συνεχείς στοχαστικές ανελίξεις. Κίνηση Brown. Χρονοδιακόπτες. Παραδείγματα. Συνεχείς martingales και βασικές ιδιότητες. Το ανάπτυγμα Doob-Meyer. Συνεχείς τετραγωνικά ολοκληρώσιμες martingales. Θεωρήματα κατασκευής της Κίνησης Brown. Ιδιότητες των τροχιών της Κίνησης Brown. Το ολοκλήρωμα Ito ως προς συνεχείς τετραγωνικά ολοκληρώσιμες martingales και βασικές ιδιότητες. Αλλαγές μεταβλητής στο στοχαστικό ολοκλήρωμα. Ο τύπος του Ito και εφαρμογές. Αναπαραστάσεις των συνεχών martingales με τη βοήθεια της Κίνησης Brown. Πιθανοθεωρητική μελέτη των διαφορικών εξισώσεων Laplace και θερμότητας. Συνήθεις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις - Παραδείγματα. Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης. Επίλυση ειδικών μορφών διαφορικών εξισώσεων.