Θεωρία Δακτυλίων & Modules
Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2014
Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις ἐπανάληψης στοὺς δακτυλίους

1. (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ πράξη τῆς ἀφαίρεσης στὸ $\mathbb{Z}$ δὲν εἶναι προσαιτεριστική.
(β′) Στὸ σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ τῶν $n \times n$ πινάκων μὲ στοιχεῖα πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ὁρίζομε τὴν πράξη $A * B = AB - BA$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ πράξη αὐτὴ δὲν εἶναι προσεταιριστική.

2. (α′) Ἔστω d ἀκέραιος, ποὺ δὲν εἶναι τετράγωνο ἀκεραίου. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d}\}$, ἐφοδιασμένο μὲ τὶς συνήθεις πράξεις $+$ καὶ $\cdot$ τοῦ $\mathbb{C}$, εἶναι ἀκέραια περιοχή.
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, ἐφοδιασμένο μὲ τὶς συνήθεις πράξεις πρόσθεσης καὶ πολλαπλασιασμοῦ συναρτήσεων, εἶναι ἀκέραια περιοχή.

3. Παρακάτω, ἰσχύει ὅτι $S \subset R$, ὅπου ὁ R εἶναι δακτύλιος. Σὲ ποιὲς περιπτώσεις τὸ S εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ R; Στὶς περιπτώσεις ποὺ αὐτὸ ἰσχύει, ἐξετᾶστε ἂν ὁ S εἶναι ἀντιμεταθετικός, ἂν ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο, ἂν εἶναι ἀκέραια περιοχή, ἂν εἶναι σῶμα.
(α′)
$$R = M_2(\mathbb{R}), \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$
(β′)
$$R = M_2(\mathbb{R}), \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$
(γ′) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad S = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] : b$ ἄρτιος$\}$.
(δ′) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad S = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] : a$ καὶ b ἄρτιοι$\}$.
(ε′) $R = \mathbb{Z}[i], \quad S = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : a \equiv b \equiv 0 \pmod 5\}$.
(ς′) $R = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad S = \{f \in R : f(1) = 0\}$.
(ζ′) $R = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad S = \{f \in R : f(1) = 1\}$.
(η′) $R = \mathbb{Z}_{18}, \quad S = \{[0], [3], [6], [9], [12], [15]\}$.
(θ′) $R = \mathbb{Z}_{mn}$ $(m, n > 1) \quad S = \{[kn] : k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Ἔστω δακτύλιος R. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ σχέση $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ἰσχύει γιὰ κάθε ζεῦγος $a, b \in R$ ἄν, καὶ μόνο ἄν, ὁ R εἶναι ἀντιμεταθετικός.
Ἀνάλογα,ἡ σχέση $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ἰσχύει γιὰ κάθε ζεῦγος $a, b \in R$ ἄν, καὶ μόνο ἄν, ὁ R εἶναι ἀντιμεταθετικός.

5. Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $([x] + [2])([x] + [3]) = [0]$ στὸν δακτύλιο $\mathbb{Z}_{10}$.

6. Ὑπολογῖστε ὅλα τὰ ζευγάρια μηδενοδιαιρετῶν στὸν δακτύλιο $\mathbb{Z}_{15}$, δηλαδή, ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη $([a], [b]) \in \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}$, τέτοια ὥστε, $[a] \neq [0]$ καὶ $[b] \neq [0]$ καὶ $[a][b] = [0]$. Ὕστερα λῦστε τὴν ἐξίσωση $[x]^2 + 4[x] + [3] = [0]$ στὸν $\mathbb{Z}_{15}$.

7. Ἔστω R ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Γιὰ ἁπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ θὰ γράφομε 1 ἀντὶ 1_R καὶ 0 ἀντὶ 0_R.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σύνολο $M_2(R)$ τῶν 2×2 πινάκων μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸν R καὶ πράξεις

ἐντελῶς ἀνάλογες μὲ αὐτὲς τῶν πινάκων μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}$, εἶναι δακτύλιος, ἐν γένει μὴ ἀντιμεταθετικός. Ὁ δακτύλιος αὐτὸς ἔχει μοναδιαῖο.

(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ
$$N_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(R) \right\}$$
ἀποτελεῖ ὑποδακτύλιο τοῦ $M_2(R)$, ποὺ περιέχει τὸ μοναδιαῖο στοιχεῖο.

(γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ εἶναι μονάδα τοῦ $N_2(R)$ ἄν, καὶ μόνο ἄν, a καὶ c εἶναι μονάδες τοῦ R.

8. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ὁ R εἶναι δακτύλιος καὶ $m, n \in \mathbb{Z}$, τότε $m(a+b) = ma + mb$ καὶ $(ma)\cdot(nb) = (mn)(a \cdot b)$.
   Ἔστω πρῶτος p.
   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ $1 \leq k < p$, ὁ ἀκέραιος $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ p.
   Ὑπόδειξη: Ἰσχύει ἡ ταυτότητα $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n}{m} \begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix}$.
   (β′) Ἔστω ἕνα σῶμα K, γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει ὅτι $pa = 0_K$ γιὰ κάθε $a \in K$ (π.χ. αὐτὸ ἰσχύει στὸ σῶμα $\mathbb{Z}_p$). Ἀποδεῖξτε ὅτι στὸ K ἰσχύει ἡ ταυτότητα $(a+b)^p = a^p + b^p$ $(a, b \in K)$.

9. Ἂν R, S εἶναι δακτύλιοι, τότε τὸ σύνολο $R \times S$, ἐφοδιασμένο μὲ τὶς «πράξεις κατὰ συντεταγμένες» ἔχει δομὴ δακτυλίου.

10. Ποιὲς εἶναι οἱ μονάδες (ἀντιστρέψιμα στοιχεῖα) τοῦ δακτυλίου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$;

11. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση $\phi(a) = 2a$, δὲν εἶναι ὁμομορφισμὸς δακτυλίων.

12. Δεῖξτε ὅτι οἱ ὑποδακτύλιοι $2\mathbb{Z}$ καὶ $3\mathbb{Z}$ τοῦ δακτυλίου $\mathbb{Z}$ δὲν εἶναι ἰσόμορφοι.

13. Ἂν $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ εἶναι ὁμομορφισμὸς δακτυλίων, τότε ὑπάρχει $k \in \mathbb{Z}$, τέτοιος ὥστε $\phi(a) = ka$ γιὰ κάθε $a \in \mathbb{Z}$.

14. Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ πολυώνυμο $f(X) = X^4 + 20X^3 - 155X^2 + 100X - 8$ εἶναι ἀνάγωγο στὸ $\mathbb{Q}[X]$.
    Ὑπόδειξη: Δεῖτε τὴν «Ἐφαρμογὴ» στὴ σελίδα 135 τοῦ βιβλίου [1].

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Ἰ. Ἐμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ὀ. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγη στην Αλγεβρα*, Εκδοσεις Σοφια, Ἀθήνα 2005.