ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $9^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδας

1. Ἔστω $\omega \neq 1$ κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδος πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$. Πρὶν συνεχίσετε, θυμηθῆτε, ἢ ὑπολογῖστε, τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμο τοῦ ω πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ ποιὰ εἶναι ἡ ἄλλη διάφορη τοῦ 1 κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδος.

   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $f(X) = X^4 - X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι ἀνάγωγο καὶ ἔχει ρίζες τὶς $\pm\rho, \pm\rho'$, ὅπου $\rho = i\omega$ καὶ $\rho' = i\omega^2$. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $f(X)$ εἶναι ἕκτες ρίζες τοῦ -1.

   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $L = \mathbb{Q}[i, \omega]$ εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$.

   (γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν $\sigma, \tau \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες: $\sigma(\omega) = \omega^2$, $\sigma(i) = i$, $\tau(\omega) = \omega$, $\tau(i) = -i$. Δεῖξτε ὅτι $\sigma^2 = \mathrm{id} = \tau^2$ καὶ $\sigma\tau = \tau\sigma$.

   (δ′) Παρατηρῆστε ὅτι $\langle\sigma, \tau\rangle$ εἶναι *ὁμάδα τῶν τεσσάρων τοῦ Klein* [1] καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \langle\sigma, \tau\rangle$.

   Στὸ Παράδειγμα 1 τῆς ἑνότητας 2.1 τῶν Σημειώσεων, τοῦ ὁποίου ἡ μελέτη συνεχίζεται στὸ Παράδειγμα 1 τῆς ενότητας 2.2, ἡ ὁμάδα Galois τῆς ἐπέκτασης ἐκείνου τοῦ παραδείγματος εἶναι, ἐπίσης ὁμάδα τεσσάρων τοῦ Klein καὶ τὸ διάγραμμα τῶν ὑποομάδων της ὑπάρχει στὴ σελίδα 33 τῶν Σημειώσεων. Γιὰ τὴν ἐπέκταση $L/\mathbb{Q}$ τούτης τῆς ἀσκήσεως, συμπληρῶστε τὸ διάγραμμα ἐνδιαμέσων ἐπεκτάσεων, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ διάγραμμα τῶν ὑποομάδων.

2. Στὴν ἄσκηση 2 τ ης $8^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδος ὁρίζεται τὸ $\theta = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ (πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$) καὶ ζητεῖται τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμο $f(X)$ τοῦ θ. Ἐπίσης, μεταξὺ ἄλλων, ζητεῖται ν' ἀποδείξετε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $f(X)$ εἶναι $\pm\theta, \pm i/\theta$ καὶ τὸ $M = \mathbb{Q}[\theta, i]$ εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$. Συνεχίζοντας ἐδῶ, ζητοῦνται τὰ ἑξῆς:

   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν $\sigma, \tau \in \mathcal{G}(M/\mathbb{Q})$, μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες: $\sigma(\theta) = -i/\theta$, $\sigma(i) = -i$, $\tau(\theta) = -\theta$, $\tau(i) = -i$.

   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, στὴν ὁμάδα $\mathcal{G}(M/\mathbb{Q})$, ἡ τάξη τοῦ σ εἶναι 4 καὶ ἡ τάξη τοῦ σ εἶναι 2. Δεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι $\tau\sigma = \sigma^3\tau$, ὁπότε, συμπεράνατε ὅτι $\langle\sigma, \tau\rangle$ εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴ διεδρικὴ ὁμάδα D_4. Συγκρίνοντας τὶς τάξεις τῶν $\mathcal{G}(M/\mathbb{Q})$ καὶ D_4, ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{G}(M/\mathbb{Q}) = \langle\sigma, \tau\rangle$.

   (γ′) Στὸ Παράδειγμα 3 τῆς ἑνότητας 2.1 τῶν Σημειώσεων, τοῦ ὁποίου ἡ μελέτη συνεχίζεται στὸ Παράδειγμα 3 τῆς ενότητας 2.2, ἡ ὁμάδα Galois τῆς ἐπέκτασης ἐκείνου τοῦ παραδείγματος εἶναι, ἐπίσης ὁμάδα ἰσόμορφη μὲ τὴ D_4 καὶ τὸ διάγραμμα τῶν ὑποομάδων τῆς

[1] Ἀναζητῆστε σ' ἕνα ὁποιοδήποτε βιβλίο Ἄλγεβρας ποιὰ εἶναι αὐτὴ ἡ ὁμάδα.

D_4 ὑπάρχει στὴ σελίδα 36 τῶν Σημειώσεων. Γιὰ τὴν ἐπέκταση $M/\mathbb{Q}$ συμπληρῶστε τὸ διάγραμμα ἐνδιαμέσων ἐπεκτάσεων, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ διάγραμμα τῶν ὑποομάδων.