ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $8^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδας

1. (α΄) Ἐξηγῆστε γιατὶ ἡ $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ εἶναι ἐπέκταση Galois.

   (β΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{G}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \langle\sigma\rangle$, ὅπου σ εἶναι ὁ αὐτομορφισμὸς τοῦ $\mathbb{C}$, ποὺ στέλνει κάθε μιγαδικὸ στὸν συζυγῆ του.

   (γ΄) Ἀφοῦ, σύμφωνα μὲ τὸ (α΄), ἡ $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ εἶναι ἐπέκταση Galois, πρέπει νὰ ἰσχύει $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathbb{C}/\mathbb{R})) = \mathbb{R}$, λόγῳ κάποιου θεωρήματος. Ἐδῶ σᾶς ζητῶ νὰ ἐπαληθεύσετε αὐτὴ τὴν ἰσότητα, δίχως νὰ ἐπικαλεσθεῖτε τὸ θεώρημα.

2. Ἔστω $\theta = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ (πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$).

   (α΄) Ὑπολογῖστε τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμο, ἔστω $f(X)$, τοῦ θ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$. Δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $f(X)$ εἶναι $\pm\theta, \pm i/\theta$.

   (β΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση $L/\mathbb{Q}$, ὅπου $L = \mathbb{Q}(\theta)$, δὲν εἶναι κανονική.

   (γ΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \langle\tau\rangle$, ὅπου τ εἶναι ὁ αὐτομορφισμὸς τοῦ L, ποὺ στέλνει τὸ θ στὸ $-\theta$.

   (δ΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{F}_L(\langle\sigma\rangle) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Κατὰ συνέπεια, $\mathcal{F}_L(\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})) \supsetneqq \mathbb{Q}$.

   (ε΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $M = \mathbb{Q}[i, \theta]$ εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ ὑπολογίσετε μία βάση τῆς ἐπέκτασης $M/\mathbb{Q}$.

   (ϛ΄) Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $\phi \in \mathcal{G}(M/\mathbb{Q})$ τέτοιος ὥστε $\phi(\theta) = -\theta$ καὶ $\phi(i) = i$, καθὼς καὶ $\psi \in \mathcal{G}(M/\mathbb{Q})$ τέτοιος ὥστε $\psi(\theta) = \theta$ καὶ $\psi(i) = -i$. Δεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι $\phi^2 = \mathrm{id} = \psi^2$ καὶ $\phi\psi = \psi\phi$.

   (ζ΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{F}_M(\langle\psi\rangle) = \mathbb{Q}[\theta]$, $\mathcal{F}_M(\langle\phi\rangle) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$ καὶ $\mathcal{F}_M(\langle\psi, \phi\rangle) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.