ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς 6ης ἑβδομάδας

1. Ἔστω $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Γιὰ $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ἔστω L σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ K.(Ἐννοεῖται ὅτι τὸ L ἐξαρτᾶται ἀπ' τὸ K. Βρεῖτε ἕνα ὅσο τὸ δυνατὸν ἁπλούστερο $S \subset L$, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα νὰ παράγουν τὸ L πάνω ἀπ' τὸ K, δηλαδή, ἂν $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$, τότε $L = K[s_1, s_2, \ldots]$.

2. (α′) Ἔστω ὅτι $a, b, c \in \mathbb{R}$ καὶ $c^2 = a^2 - b$. Ἀποδεῖξτε ὅτι

$$\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)^2 = a \pm \sqrt{b}.$$

Αὐτὴ ἡ ταυτότητα μπορεῖ νὰ ἐπαναδιατυπωθεῖ καὶ ὡς ἑξῆς,

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2-b}}{2}}$$

καὶ εἶναι χρήσιμη ὅταν $a, b \in \mathbb{Z}$ καὶ τὸ $a^2 - b$ εἶναι τέλειο τετράγωνο.

(β′) Κάνοντας χρήση τοῦ (α′), ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X) = X^4 - 14X^2 + 36$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ εἶναι τὸ $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{13}]$.

3. Ἔστω $f(X) \in K[X]$ καὶ L σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ K. Ἔστω M μία ἐνδιάμεση ἐπέκταση μεταξὺ K καὶ L. Ἀποδεῖξτε ὅτι L εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ καὶ πάνω ἀπ' τὸ M.

4. Ἔστω ω ρίζα τοῦ $f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(α′) Ἐξηγῆστε γιατὶ τὸ $M = \mathbb{Q}[\omega]$ εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$. (Δεῖτε τὴν ἄσκηση 2 (α′) τῶν ἀσκήσεων τῆς 5ης ἑβδομάδας.)

(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $g(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι ἀνάγωγο καὶ πάνω ἀπ' τὸ M.

(γ′) Ἔστω L σῶμα ριζῶν τοῦ $g(X)$ πάνω ἀπ' τὸ M καὶ $\xi \in M$ μία ρίζα τοῦ $g(X)$. Ποιὲς εἶναι οἱ ἄλλες δύο ρίζες τοῦ $g(X)$; Ἀποδεῖξτε ὅτι $L = \mathbb{Q}[\omega, \xi]$.

(δ′) Ἐφαρμόστε τὴν Πρόταση 2.1.3 τῶν Σημειώσεων καὶ ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς: Γιὰ κάθε ρίζα r τοῦ $f(X)$ καὶ γιὰ κάθε ρίζα s τοῦ $g(X)$ ὑπάρχει $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$, τέτοιος ὥστε $\sigma(\omega) = r$ καὶ $\sigma(\xi) = s$. Βάσει αὐτοῦ, ἐξηγῆστε γιατὶ ἡ ὁμάδα $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ ἔχει ἕξι, ἀκριβῶς, στοιχεῖα, ἔστω τὰ $\sigma_0 = \mathrm{id}, \sigma_1, \ldots, \sigma_5$.

(ε′) Γιὰ κάθε $i = 0, 1, \ldots, 5$ ἐκφρᾶστε τὰ $\sigma_i(\omega)$ καὶ $\sigma_i(\xi)$ συναρτήσει τῶν ω καὶ ξ. Αὐτὸ θὰ σᾶς ἐπιτρέψει νὰ μπορέσετε, γιὰ κάθε i, j νὰ βρεῖτε μὲ ποιὸν σ_k ἰσοῦται ὁ $\sigma_i\sigma_j$. Ἔτσι, θὰ μπορέσετε νὰ συμπληρώσετε τὸν παρακάτω πίνακα "πολλαπλασιασμοῦ" τῆς ὁμάδας $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$.

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_0						
σ_1						
σ_2						
σ_3						
σ_4						
σ_5						

(ϛ′) Βρεῖτε δύο αὐτομορφισμοὺς $\sigma_i, \sigma_j \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$, μὲ τῆς ἑξῆς ἰδιότητες: Ἡ τάξη τοῦ σ_i εἶναι 3, ἡ τάξη τοῦ σ_j εἶναι 2 καὶ $\sigma_j\sigma_i = \sigma_i^2\sigma_j$, δηλαδή, ὅπως τὸ γράφομε συμβολικά:

$$\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \langle \sigma_i, \sigma_j \,|\, \sigma_i^3 = \mathrm{id} = \sigma_j^2,\ \sigma_j\sigma_i = \sigma_i^2\sigma_j \rangle.$$

Συμπεράνατε ὅτι ἡ ὁμάδα $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴ διεδρικὴ ὁμάδα D_3 (ΟΜΑΔΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ ΤΟΥ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ), καθὼς καὶ μὲ τὴ συμμετρικὴ ὁμάδα S_3 (μεταθέσεις τῶν 3 πραγμάτων).

5. Ἔστω $L = \mathbb{Q}[\theta]$, ὅπου $\theta^3 - 3\theta - 1 = 0$.

(α′) Ἀποδεῖξτε, μὲ ἀλγεβρικοὺς ὑπολογισμοὺς ὅτι τὰ στοιχεῖα $2 - \theta^2$ καὶ $-2 - \theta + \theta^2$ εἶναι, ἐπίσης, ρίζες τοῦ $f(X) = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ καὶ ἐξηγῆστε γιατὶ τὸ L εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$.

(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$, τέτοιος ὥστε $\sigma(\theta) = 2 - \theta^2$. Ὑπολογῖστε τὰ $\sigma^2(\theta)$ (προσοχή! $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$) καὶ δεῖξτε ὅτι $\sigma^3 = \mathrm{id}$. Βάσει αὐτῶν, ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ὁμάδα $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ εἶναι κυκλική, τάξεως 3, ἄρα ἰσόμορφη μὲ τὴ $\mathbb{Z}_3$.