ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς 5ης ἑβδομάδας

1. Ἔστω $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ καὶ $L = K[\sqrt{3}]$.

(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $X^2 - 2$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ τὸ $X^2 - 3$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $K$.

(β′) Δῶστε βάσεις τῶν ἐπεκτάσεων $K/\mathbb{Q}$, $L/K$ καὶ $L/\mathbb{Q}$.

(γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει αὐτομορφισμὸς $\tau$ τοῦ $L$, ποὺ ἀφήνει ἀναλλοίωτους τοὺς ρητοὺς καὶ στέλνει τὸ $\sqrt{2}$ στὸ $-\sqrt{2}$ καὶ τὸ $\sqrt{3}$ στὸ $-\sqrt{3}$.

Ὑπόδειξη: Πρῶτα θὰ δείξετε ὅτι ὑπάρχει αὐτομορφισμὸς $\sigma$ τοῦ $K$, ποὺ ἀφήνει ἀναλλοίωτους τοὺς ρητοὺς καὶ στέλνει τὸ $\sqrt{2}$ στὸ $-\sqrt{2}$ καὶ μετὰ θὰ δείξετε ὅτι ὁ $\sigma$ μπορεῖ νὰ ἐπεκταθεῖ σὲ ἰσομορφισμὸ $\tau : K[\sqrt{3} \to K[\sqrt{3}]$ (ἄρα σὲ αὐτομορφισμὸ τοῦ $K[\sqrt{3}] = L$), ποὺ στέλνει τὸ $\sqrt{3}$ στὸ $-\sqrt{3}$.

(δ′) Λύσετε τὴν ἐξίσωση $\rho^4 - 10\rho^2 + 1 = 0$, θέτοντας πρῶτα $\rho^2 = t$ καὶ λύνοντας τὴ δευτεροβάθμια $t^2 - 10t + 1 = 0$. Θὰ ἐμφανισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $5 \pm 2\sqrt{6}$. Παρατηρῆστε ὅτι $5 \pm 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} \pm \sqrt{3})^2$ καὶ καταλήξετε στὸ συμπέρασμα ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $f(X) = X^4 - 10X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι

$$\rho_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \rho_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \rho_3 = \sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad \rho_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $L$ εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$.

(ε′), Ἔστω $\lambda = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ καὶ $\lambda' = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{6}$, ὅπου οἱ συντελεστὲς $a, b, c, d, a', b', c', d'$ εἶναι ρητοί. Γιατὶ ἡ ἰσότητα $\lambda = \lambda'$ συνεπάγεται ὅτι $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$; Ἐκφρᾶστε τὸ $\tau(\lambda)$ μὲ τὴ μορφὴ $a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{6}$. Ἀποδεῖξτε μετά, ὅτι τὸ σύνολο τῶν $\lambda \in L$, γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $\tau(\lambda) = \lambda$ εἶναι τὸ ὑπόσωμα $\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$ τοῦ $L$.

(ς′) Δεῖξτε ὅτι $\tau(\rho_1) = \rho_4, \tau(\rho_2) = \rho_3, \tau(\rho_3) = \rho_2, \tau(\rho_4) = \rho_1$.

2. Ἔστω $\xi$ ρίζα τοῦ $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, $\omega$ ρίζα τοῦ $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, $K = \mathbb{Q}[\xi]$, καὶ $L = K[\omega]$.

(α′) Δεῖξτε ὅτι οἱ κυβικὲς ρίζες τῆς μονάδας εἶναι $1, \omega, \omega^2 = -1 - \omega$.

(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $X^3 - 2$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ τὸ $X^2 + X + 1$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $K$.

(γ′) Δῶστε βάσεις τῶν ἐπεκτάσεων $K/\mathbb{Q}$, $L/K$ καὶ $L/\mathbb{Q}$ καὶ δεῖξτε ὅτι, κάθε στοιχεῖο $\lambda \in L$ εἶναι τῆς μορφῆς $\lambda = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + b_0\omega + b_1\omega\xi + b_2\omega\xi^2$, ὅπου τὰ $a_i, b_i$ εἶναι ρητοί.

(δ΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $L$ εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $X^3 - 2$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$.

(ε΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει αὐτομορφισμὸς $\tau$ τοῦ $L$, ποὺ ἀφήνει ἀναλλοίωτους τοὺς ρητοὺς καὶ στέλνει τὸ $\xi$ στὸ $\omega\xi$ καὶ τὸ $\omega$ στὸ $\omega^2$.

(ϛ΄) Ἔστω $\lambda = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + b_0\omega + b_1\omega\xi + b_2\omega\xi^2$, μὲ τοὺς $a_i, b_i$ ρητούς. Γρᾶψτε τὸ $\tau(\lambda)$ μὲ τὴ μορφὴ $a'_0 + a'_1\xi + a'_2\xi^2 + b'_0\omega + b'_1\omega\xi + b'_2\omega\xi^2$ καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι, τὸ ὑπόσωμα τοῦ $L$, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὸ ὅτι μένουν ἀναλλοίωτα ἀπ' τὸν $\tau$, εἶναι τὸ $\mathbb{Q}[\xi\omega^2]$.

Ὑπόδειξη. Δεῖξτε ὅτι $\tau(\lambda) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = a_0 + a_1\xi(1+\omega) + b_2\xi^2\omega$. Παρατηρῆστε ὅτι $\xi(1+\omega) = -\xi\omega^2$ καὶ $(\xi\omega^2)^2 = \xi^2\omega$.

3. Ἔστω $\theta$ ρίζα τοῦ $X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$, $i$ ρίζα τοῦ $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, $K = \mathbb{Q}[\theta]$, καὶ $L = K[i]$.

(α΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $X^4 - 3$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ τὸ $X^2 + 1$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $K$.

(β΄) Δῶστε βάσεις τῶν ἐπεκτάσεων $K/\mathbb{Q}$, $L/K$ καὶ $L/\mathbb{Q}$ καὶ δεῖξτε ὅτι, κάθε στοιχεῖο $\lambda \in L$ εἶναι τῆς μορφῆς $\lambda = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + b_0 i + b_1\theta i + b_2\theta^2 i + b_3 i\theta^3$, ὅπου τὰ $a_i, b_i$ εἶναι ρητοί.

(γ΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $L$ εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $X^4 - 3$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$.

(δ΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει αὐτομορφισμὸς $\tau$ τοῦ $L$, ποὺ ἀφήνει ἀναλλοίωτους τοὺς ρητοὺς καὶ στέλνει τὸ $\theta$ στὸ $i\theta$ καὶ τὸ $i$ στὸ $-i$.

(ϛ΄) Ἔστω $\lambda = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + b_0 i + b_1\theta i + b_2\theta^2 i + b_3\theta^3 i$, μὲ τοὺς $a_i, b_i$ ρητούς. Γρᾶψτε τὸ $\tau(\lambda)$ μὲ τὴ μορφὴ $a'_0 + a'_1\theta + a'_2\theta^2 + a'_3\theta^3 + b'_0 i + b'_1\theta i + b'_2\theta^2 i + b'_3\theta^3 i$ καὶ μετὰ δεῖξτε ὅτι, ἂν $\tau(\lambda) = \lambda$, τότε $\lambda = a_0 + a_1\theta(1+i) + b_2\theta^2 i + a_3\theta^3(1-i)$. Θέσετε $\kappa = \theta(1+i)$ καὶ ἐκφρᾶστε τὰ $\theta^2 i$ καὶ $\theta^3(1-i)$ συναρτήσει τοῦ $\kappa$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, τὸ ὑπόσωμα τοῦ $L$, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὸ ὅτι μένουν ἀναλλοίωτα ἀπ' τὸν $\tau$, εἶναι τὸ $\mathbb{Q}[\kappa]$.

(ζ΄) Παρατηρῆστε ὅτι τὸ $\kappa$ εἶναι ρίζα τοῦ $X^4 + 12 \in \mathbb{Q}[X]$ καὶ δεῖξτε ὅτι τὸ $L$ εἶναι σῶμα ριζῶν καὶ τοῦ $X^4 + 12$.