ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $4^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδας

1. Διαπιστῶστε ὅτι τὸ $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ εἶναι ἀνάγωγο καὶ, μὲ τὴ βοήθεια αὐτοῦ, κατασκευᾶστε τὸ σῶμα $\mathbb{F}_9$ (θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\mathbb{Z}_3[\lambda]$) μὲ 9 (ἀκριβῶς) στοιχεῖα. Φτιᾶξτε τοὺς πίνακες πρόσθεσης καὶ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $\mathbb{F}_9$.

2. Διαπιστῶστε ὅτι τὸ $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$ εἶναι ἀνάγωγο καί, μὲ τὴ βοήθεια αὐτοῦ, κατασκευᾶστε τὸ σῶμα $\mathbb{F}_{125}$ μὲ 125 (ἀκριβῶς) στοιχεῖα. Ἔστω $\rho \in F_{125}$ ρίζα τοῦ $f(X)$. Ἐξηγῆστε γιατὶ $\mathbb{F}_{125} = \{a + b\rho + c\rho^2 : a, b, c \in \mathbb{Z}_5\}$. Γρᾶψτε μὲ τὴ μορφὴ $a + b\rho + c\rho^2$ $(a, b, c \in \mathbb{Z}_5)$ τὰ στοιχεῖα $(1 + \rho + 2\rho^2)(2 + 3\rho + \rho^2)$ καὶ $(1 + \rho)^{-1}$.

   Ἀποτελέσματα τῶν πράξεων: $(1 + \rho + 2\rho^2)(2 + 3\rho + \rho^2) = \rho + \rho^2$, $\quad (1 + \rho)^{-1} = 2 + 4\rho + \rho^2$.

3. Ἔστω $\omega \neq 1$ μία μιγαδικὴ κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδας. Παρατηρῆστε, πρῶτ' ἀπ' ὅλα, ὅτι $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, καθὼς καὶ ὅτι $\omega^2 = \overline{\omega}$. Ὕστερα ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:

   (α′) Ἂν $a, b, c \in \mathbb{Q}$ καὶ ἰσχύει ἡ σχέση $(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^3 = 1 + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, τότε ἰσχύουν καὶ οἱ ἑξῆς σχέσεις:

   $$\begin{aligned}(a + b\omega\sqrt[3]{2} + c\overline{\omega}\sqrt[3]{4} &= 1 + 2\omega\sqrt[3]{2} - \overline{\omega}\sqrt[3]{4}\\ (a + b\overline{\omega}\sqrt[3]{2} + c\omega\sqrt[3]{4} &= 1 + 2\overline{\omega}\sqrt[3]{2} - \omega\sqrt[3]{4}.\end{aligned}$$

   (β′) Ἂν κάποιο πολυώνυμο $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ἔχει ρίζα τὸ $\rho = 1 + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, τότε ἔχει ρίζες καὶ τὰ $\rho' = 1 + 2\omega\sqrt[3]{2} - \overline{\omega}\sqrt[3]{4}$ καὶ $\rho'' = 1 + 2\overline{\omega}\sqrt[3]{2} - \omega\sqrt[3]{4}$.

4. Ἔστω τὸ $p(X) = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $p(X)$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$.

   (β′) Ἔστω ξ μία ρίζα τοῦ $p(X)$ σὲ μία ἐπέκταση τοῦ $\mathbb{Q}$ (δὲν ἔχει σημασία σὲ ποιά). Ἀποδεῖξτε, μὲ ἀλγεβρικὲς πράξεις, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\xi' = 2 - \xi^2$ καὶ $\xi'' = -2 - \xi + \xi^2$ εἶναι ἐπίσης ρίζες τοῦ $p(X)$.

   (γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἰσομορφισμὸς $\sigma : \mathbb{Q}[\xi] \to \mathbb{Q}[\xi']$, μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες: $\sigma(q) = q$ γιὰ κάθε $q \in \mathbb{Q}$ καὶ $\sigma(\xi) = 2 - \xi^2$. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ σ, ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν κάποιο $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ἔχει ρίζα τὸν ἀριθμὸ $a + b\xi + c\xi^2$, ὅπου $a, b, c \in \mathbb{Q}$, τότε τὸ $f(X)$ ἔχει ρίζα καὶ τὸν ἀριθμὸ $(a + 2b + 4c) + c\xi - (b + c)\xi^2$.

5. Ἔστω $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ καὶ $\beta = \sqrt{1-\sqrt{2}}$.

Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἰσομορφισμὸς $\tau : \mathbb{Q}[\alpha] \to \mathbb{Q}[\beta]$, μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

(α′) $\tau(q) = q$ γιὰ κάθε $q \in \mathbb{Q}$, $\quad \tau(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\quad \tau(\alpha) = -\beta$.

Ὑπόδειξη: Μιμούμενοι τὰ παραδείγματα, ποὺ κάναμε στὸ μάθημα, κατασκευᾶστε ἕναν ἰσομορφισμὸ $\sigma : K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = K$, ὁ ὁποῖος ἐπεκτείνει τὸν ταυτοτικὸ $\mathrm{id} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ καὶ στέλνει τὸ $\sqrt{2}$ στὸ $-\sqrt{2}$. Στὴ συνέχεια, παρατηρῆστε ὅτι τὸ α εἶναι ρίζα τοῦ $p(X) = X^2 - (1+\sqrt{2}) \in K[X]$ καὶ αὐτὸ τὸ πολυώνυμο εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ’ τὸ K. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ πολυώνυμο $\sigma p \in K[X]$ ἔχει ρίζα τὸ β καὶ ἐπεκτείνετε τὸν σ σὲ ἰσομορφισμὸ $K[\alpha] \to K[\beta]$. Ἀποδεῖξτε (εἶναι ἁπλό) ὅτι $K[\alpha] = \mathbb{Q}[\alpha]$ καὶ $K[\beta] = \mathbb{Q}[\beta]$.