ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ
Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2016
Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $3^{ης}$ ἑβδομάδας

1. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ κανονικὸ 7γωνο δὲν κατασκευάζεται μὲ κανόνα καὶ διαβήτη.
Ὑπόδειξη. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ n-νου ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν κατασκευὴ τοῦ $\cos(2\pi/n)$, ἄρα, ἀρκεῖ ν' ἀποδείξετε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\cos(2\pi/7)$ δὲν εἶναι κατασκευάσιμος. Χρησιμοποιήσετε τὸν τῦπο
$$\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta,$$
καθὼς ἐπίσης καὶ τὴν παρακάτω ἀνάλυση σὲ ἀνάγωγα (πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}[X]$) πολυώνυμα:
$$64X^7 - 112X^5 + 56X^3 - 7X - 1 = (X-1)(8X^3 + 4X^2 - 4X - 1)^2.$$

2. Πᾶρτε ὡς μοναδιαῖο μῆκος τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 5 cm καὶ κατασκευᾶστε, σχεδιάζοντας μὲ ἀκρίβεια, πάνω στὸ χαρτί, **χρησιμοποιώντας κανόνα καὶ διαβήτη**, τὸν ἀριθμὸ
$$\lambda = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}}\,.$$
Βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$, ποὺ νὰ ἔχει ρίζα τὸ λ.

3. Ἔστω σῶμα K καὶ $p(X) \in K[X]$. Στὸν δακτύλιο $K[X]$ ὁρίζομε τὴν ἑξῆς σχέση:
$$f(x) \equiv g(X) \quad \Leftrightarrow \quad p(X) \,|\, f(X) - g(X).$$
Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:
(α′) Εἶναι $f(X) \equiv g(X)$ ἂν καὶ μόνο ἂν τὰ $f(X), g(X)$ διαιρούμενα μὲ τὸ $p(X)$ ἀφήνουν τὸ ἴδιο ὑπόλοιπο.
(β′) Ἡ παραπάνω σχέση εἶναι ἰσοδυναμία.

Γιὰ τὰ παρακάτω ἐρωτήματα συμβολίζομε τὴν κλάση τοῦ τυχόντος $f(X) \in K[X]$ μὲ $\overline{f(X)}$ καὶ μὲ L τὸ σύνολο τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας.
Ὁρίζομε πρόσθεση καὶ πολλαπλασιασμὸ στὸ L, ὡς ἑξῆς:
$$\overline{f(X)} + \overline{g(X)} = \overline{f(X) + g(X)}\,, \qquad \overline{f(X)} \cdot \overline{g(X)} = \overline{f(X) \cdot g(X)}\,.$$

(γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ πράξεις αὐτὲς εἶναι καλὰ ὁρισμένες, δηλαδή, ἂν $\overline{f_1(X)} = \overline{f(X)}$ καὶ $\overline{g_1(X)} = \overline{g(X)}$, τότε $\overline{f_1(X) + g_1(X)} = \overline{f(X) + g(X)}$, καθὼς καὶ $\overline{f_1(X) \cdot g_1(X)} = \overline{f(X) \cdot g(X)}$.
(δ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σύνολο L, ἐφοδιασμένο μὲ τὶς παραπάνω πράξεις, ἀποκτᾶ δομὴ μεταθετικοῦ δακτυλίου.[1]
(ε′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $K \ni a \mapsto \overline{a} \in L$ εἶναι μονομορφισμὸς σωμάτων.

[1] Μὲ δεδομένο αὐτό, στὸ μάθημα ἀποδείξαμε ὅτι, κάθε μὴ μηδενικὸ στοιχεῖο τοῦ L εἶναι ἀντιστρέψιμο, ἄρα τὸ L εἶναι σῶμα.