ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $11^{\text{ης}}$ ἑβδομάδας

Νὰ ἔχετε, ὁπωσδήποτε, ὑπ' ὄψιν σας τὰ "ἐργαλεῖα" 11 καὶ 12 τῆς Ἐργαλειοθήκης.

1. Ἔστω $K \subseteq L \subseteq M$ διαδοχικὲς ἐπεκτάσεις, τέτοιες ὥστε, οἱ L/K καὶ M/L εἶναι ριζικές. Δεῖξτε ὅτι καὶ ἡ M/K εἶναι ριζική.

2. Ἔστω K ὑπόσωμα τοῦ $\mathbb{C}$,[1] καὶ ἀκέραιος $n \geq 2$, $n = p_1 \cdots p_k$, ὅπου $p_1, \ldots, p_k$ εἶναι πρῶτοι, ὄχι κατ' ἀνάγκη διαφορετικοί. Ἔστω L τὸ σῶμα ριζῶν πάνω ἀπ' τὸ K τοῦ $X^n - 1 \in K[X]$. Γιὰ κάθε $j \in \{1, \ldots, k\}$ θέτομε
$$z_j = \cos\frac{2\pi}{p_1 \cdots p_{j-1} p_j} + i \sin\frac{2\pi}{p_1 \cdots p_{j-1} p_j}.$$
Ἀποδεῖξτε ὅτι, $z_j^{p_j} = z_{j-1}$ γιὰ κάθε $j \in \{2, \ldots, k\}$ καὶ συμπεράνατε ὅτι ἡ ἐπέκταση L/K εἶναι ριζική.

3. Ἔστω K ὑπόσωμα τοῦ $\mathbb{C}$, $a \in K$ καὶ ἀκέραιος $n \geq 2$. Ἔστω $b \in \mathbb{C}$, τέτοιο ὥστε $b^n = a$ καὶ L τὸ σῶμα ριζῶν πάνω ἀπ' τὸ $K(b)$ τοῦ $X^n - a$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση L/K εἶναι ριζική.
Ὑπόδειξη. Ἔστω L τὸ σῶμα ριζῶν τοῦ $X^n - 1$ πάνω ἀπ' τὸ $K(b)$. Δεῖξτε ὅτι τὸ L εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $X^n - a$ πάνω ἀπ' τὸ K. Θεωρῆστε τὶς διαδοχικὲς ἐπεκτάσεις $K \subseteq K(b) \subseteq L$ καὶ ἐφαρμόστε τὴν ἄσκηση 2 μὲ τὸ $K(b)$ στὴ θέση τοῦ K, καθὼς καὶ τὴν ἄσκηση 1.

4. Ἔστω ὅτι τὸ $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι ἐπιλύσιμο μὲ ριζικά. Ἔστω ἀκέραιος $n \geq 2$ καὶ $g(X) = f(X^n)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι καὶ τὸ $g(X)$ εἶναι ἐπιλύσιμο μὲ ριζικά.
Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ εἶναι ὅλες οἱ ρίζες τοῦ $f(X)$ καὶ $K = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_r)$ τὸ σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ K. Ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ἐπέκταση $K/\mathbb{Q}$ εἶναι ριζική. Θεωροῦμε $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{C}$, τέτοια ὥστε $b_j^n = a_j$ γιὰ κάθε $j = 1, \ldots, r$. Ἔστω K_1 τὸ σῶμα ριζῶν τοῦ $X^n - a_1$ πάνω ἀπ' τὸ $K(b_1)$. Ἀπὸ τὴν ἄσκηση 3, ἡ ἐπέκταση K_1/K εἶναι ριζική. Μετά, ἔστω K_2 τὸ σῶμα ριζῶν τοῦ $X^n - a_2$ πάνω ἀπ' τὸ $K_1(b_2)$. Πάλι ἀπ' τὴν ἄσκηση 3, ἡ ἐπέκταση K_2/K_1 εἶναι ριζική. Ποιὸ εἶναι τὸ ἑπόμενο βῆμα; Προχωρώντας ἔτσι, βῆμα-βῆμα, δεῖτε ὅτι θὰ φτάσετε μέσῳ διαδοχικῶν ριζικῶν ἐπεκτάσεων στὸ σῶμα ριζῶν πάνω ἀπ' τὸ K τοῦ $g(X)$. Φυσικά, θὰ χρησιμοποιήσετε καὶ τὴν ἄσκηση 1.

---

[1] Εἶναι ἁπλὸ νὰ δείξει κανεὶς ὅτι κάθε ὑπόσωμα τοῦ $\mathbb{C}$ εἶναι ἐπέκταση τοῦ $\mathbb{Q}$, ἄρα $\mathbb{Q} \subseteq K$.