ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $10^{\text{ης}}$ ἑβδομάδας

Ἔστω $\rho = \sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(X) = X^6 - X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Θεωρῆστε δεδομένο ὅτι τὸ $f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ ἀποδεῖξτε τὰ παρακάτω:

1. Ὅλες οἱ ρίζες τοῦ $f(X)$ εἶναι $\rho, \omega\rho, \omega^2\rho, -1/\rho, -\omega/\rho, -\omega^2/\rho$, ὅπου ω εἶναι κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδας, $\omega \neq 1$ (ἄρα $\omega^2 + \omega + 1 = 0$). Συμπεράνατε ὅτι $L = \mathbb{Q}[\rho, \omega]$ εἶναι σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$.

2. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν αὐτομορφισμοὶ $\sigma, \tau \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$, τέτοιοι ὥστε $\sigma(\rho) = -\omega/\rho, \sigma(\omega) = \omega^2$, $\tau(\rho) = \rho, \tau(\omega) = \omega^2$. Μετά, ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ τάξεις τῶν σ, τ εἶναι 6 καὶ 2, ἀντιστοίχως, καὶ $\tau\sigma = \sigma^5\tau$, ἄρα, $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong D_6$. Ὑπενθυμίζεται ὅτι τὰ στοιχεῖα τῆς D_6 εἶναι $\{\mathrm{id}, \sigma, \ldots, \sigma^5, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^5\tau\}$. Γιὰ τὶς πράξεις στὴν ὁμάδα D_6, χρήσιμη εἶναι ἡ σχέση (ἀποδεῖξτε την, εἶναι ἁπλῆ) $\tau\sigma^k = \sigma^{6-k}\tau = \sigma^{-k}\tau$. Ἐπίσης, συμπληρῶστε ἕνα πίνακα ποὺ θὰ δείχνει τὴ δράση καθενὸς ἀπ' τοὺς 12 αὐτομορφισμοὺς τῆς $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ στὰ ρ καὶ ω.

3. Στὸν πίνακα 1 ἐμφαίνονται ὅλες οἱ ἐνδιάμεσες ἐπεκτάσεις E τῆς $L/\mathbb{Q}$, μὲ $E \neq \mathbb{Q}, L$. Ἕνας ἢ δύο γεννήτορες δίδονται γιὰ κάθε ἐπέκταση E. Ἀπὸ ἐσᾶς ζητοῦνται τὸ ἑξῆς:

   (α΄) Γιὰ κάθε E ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathcal{G}(L/E)$ εἶναι αὐτὴ ἡ ὑποομάδα τῆς $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$, ποὺ ἐμφανίζεται στὴν ἴδια γραμμὴ μὲ τὴν E. Ἐπίσης, ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ $\mathcal{G}(L/E)$ εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ ἂν δίπλα στὴν $\mathcal{G}(L/E)$ ὑπάρχει ἡ ἔνδειξη «ναί», ἐνῶ δὲν εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα ἂν ὑπάρχει ἡ ἔνδειξη «ὄχι».

   (β΄) Βρεῖτε τὸν βαθμὸ $[E : \mathbb{Q}]$ γιὰ κάθε E. Γιὰ τὶς τρεῖς πρῶτες E, ὁ βαθμὸς εἶναι προφανής, ἀλλὰ γιὰ ὅλες τὶς ἑπόμενες, νὰ τὸν ὑπολογίσετε χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσετε τὴν πληροφορία τῆς στήλης «ἐλάχιστα πολυώνυμα γεννητόρων». Αὐτὸ θὰ τὸ πετύχετε εὔκολα ὑπολογίζοντας τὴν $|\mathcal{G}(L/E)|$ καὶ κάνοντας χρήση τοῦ *Θεμελιώδους Θεωρήματος τῆς Θεωρίας Galois*.

   (γ΄) Στὶς (πέντε) περιπτώσεις, ποὺ $\mathcal{G}(L/E) \lhd \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$, ὑπολογῖστε τὰ στοιχεῖα (ἀριστερὲς κλάσεις) τῆς ὁμάδας-πηλῖκο $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})/\mathcal{G}(L/E)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, στὶς τρεῖς πρῶτες περιπτώσεις, αὐτὴ ἡ ὁμάδα εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν $\mathbb{Z}_2$, ἐνῶ στὴν τέταρτη καὶ πέμπτη περίπτωση (ἀπὸ τὶς προαναφερθεῖσες πέντε περιπτώσεις, δηλαδή, στὶς E τῆς $7^{ης}$ καὶ $8^{ης}$ γραμμῆς) οἱ ὁμάδες-πηλῖκα εἶναι ἰσόμορφες μὲ τὶς V_4 (*ὁμάδα τῶν τεσσάρων τοῦ Klein*, ἡ ὁποία εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) καὶ D_3, ἀντιστοίχως. Τί συμπεράσματα βγάζετε γιὰ τὴν ὁμάδα Galois $\mathcal{G}(E/\mathbb{Q})$ κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς πέντε ἐπεκτάσεις $E/\mathbb{Q}$; Προσοχή! Μέχρι λίγο πρὶν κάναμε λόγο γιὰ ὁμάδες $\mathcal{G}(L/E)$, ἄρα γιὰ ὑποομάδες αὐτομορφισμῶν τοῦ L, ἐνῶ τώρα κάνομε λόγο γιὰ ὁμάδες $\mathcal{G}(E/\mathbb{Q})$, ἄρα γιὰ ὑποομάδες αὐτομορφισμῶν τοῦ E.

Ὑπόδειξη: Ἀπὸ τὸ Θεμελιῶδες Θεώρημα, $\mathcal{G}(E/\mathbb{Q}) \cong \mathcal{G}(L/E)/\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$. Ἄρα, ἄν, γιὰ παράδειγμα, $\mathcal{G}(L/E) \triangleleft \mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2$, ἡ ἀπάντησή σας πρέπει νὰ εἶναι ὅτι, οἱ μόνοι $\mathbb{Q}$-αὐτομορφισμοὶ τοῦ σώματος E εἶναι ὁ ταυτοτικὸς καὶ ἄλλος ἕνας, ἔστω ϕ, τέτοιος ὥστε $\phi^2 = \mathrm{id}_E$.

Πίνακας 1: Ὅλες οἱ ἐνδιάμεσες ἐπεκτάσεις $\mathbb{Q} \subsetneq E \subsetneq L$.

Γεννήτορες τῆς E	ἐλάχιστα πολυώνυμα γεννητόρων	$\mathcal{G}(L/E)$	$\mathcal{G}(L/E) \triangleleft \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$;
$\sqrt{-15} = (2\rho^3 - 1)(2\omega + 1)$	$X^2 + 15$	$\langle\sigma\rangle$	Ναί
$\sqrt{5} = 2\rho^3 - 1$	$X^2 - 5$	$\langle\sigma^2, \tau\rangle$	Ναί
ω	$X^2 + X + 1$	$\langle\sigma^2, \sigma\tau\rangle$	Ναί
$\theta_1 = 1 - \rho^2 + \omega(-\rho - \rho^2 + \rho^4)$	$X^3 - 3X^2 - 1$	$\langle\sigma^3, \sigma\tau\rangle$	Ὄχι
$\theta_2 = 1 + \rho - \rho^4 + \omega(\rho + \rho^2 - \rho^4)$	$X^3 - 3X^2 - 1$	$\langle\sigma^3, \sigma^2\tau\rangle$	Ὄχι
$\theta_3 = 1 - \rho + \rho^2 + \rho^4$	$X^3 - 3X^2 - 1$	$\langle\sigma^3, \sigma^3\tau\rangle$	Ὄχι
$\xi = 3 + \rho^3 + 6\omega$	$X^4 - 2X^3 + 53X^2 - 52X + 811$	$\langle\sigma^2\rangle$	Ναί
$\sqrt{-15},\ \theta_1$		$\langle\sigma^3\rangle$	Ναί
$\sqrt{5},\ \theta_1$		$\langle\sigma^4\tau\rangle$	Ὄχι
$\omega,\ \theta_1$		$\langle\sigma\tau\rangle$	Ὄχι
$\sqrt{5},\ \theta_2$		$\langle\sigma^2\tau\rangle$	Ὄχι
$\omega,\ \theta_2$		$\langle\sigma^5\tau\rangle$	Ὄχι
$\sqrt{5},\ \theta_3$		$\langle\tau\rangle$	Ὄχι
$\omega,\ \theta_3$		$\langle\sigma^3\tau\rangle$	Ὄχι